Blücherschule
Europaschule

Evaluationsbericht

der

Blücherschule-Europaschule-Ganztagsgrundschule

zum Projekt: Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler durch den Einsatz von Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule.

Zeitraum: März bis Juni 2016

Jahrgang: 4. Schuljahr

Ziele: Durch den Einsatz von Lernumgebungen im Mathematikunterricht wird insbesondere das problemlösende Denken der Schüler gefördert. Es werden weiterhin die allgemeinen mathematischen Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren gesteigert.

Verantwortliche Lehrkräfte:

____
Kathrin Herzog

Schulleiterin:

____
Monika Frickhofen

Blücherschule
Europaschule

Inhaltsverzeichnis

1 Kurzfassung zum Evaluationsbericht

Schule	Blücherschule – Europaschule
Schulform	Ganztagsgrundschule, Wiesbaden
Jahrgang	4. Schuljahr
Schuljahr	2015 – 2016
Titel des Vorhabens	Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch den Einsatz von Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule
Bezug zum Europäischen Curriculum	Lehren und Lernen / Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bildung
Bezug zum Schulentwick-lungsprogramm	Individualisiertes Lernen und Unterrichtsentwicklung
Thema des Unterrichts-vorhabens	Förderung ausgewählter mathematischer Kompetenzen durch den Einsatz von Lernumgebungen im Bereich der Arithmetik. Schwerpunkt: „Wir erforschen das Zahlenfeld“
Projektzeitraum	März bis Juni 2016
Ziele	Im Mittelpunkt des Projektes steht die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, insbesondere das problemlösende Denken der SuS[1]. Darüber hinaus sollen die Kinder ihre Entdeckungen verbalisieren und dabei plausibel und logisch begründen, was letztlich ihre Kompetenzen zum Kommunizieren und Argumentieren schult.
Rechtfertigung der Ziele	Die Blücherschule verfolgt in ihrem Schulprogramm das Ziel einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung. „Mathematik und Naturwissenschaften stellen eine internationale Sprache dar, deren kulturübergreifende

[1] SuS bedeutet Schülerinnen und Schüler.

	Dimension offensichtlich ist. Daher sind sie ein zentraler Bestandteil eines interkulturellen Curriculums."[2] Als Europaschule legt die Blücherschule besonderen Wert auf ein nachhaltiges Lernen und die Entwicklung einer „europäischen Identität" ihrer SuS. Dabei sind Teamfähigkeit, Verantwortungsbewusstsein und Handlungskompetenz wesentliche Voraussetzungen, um sich in einer sich wandelnden Gesellschaft bewähren zu können.[3] In den Leitzielen der Hessischen Europaschulen sind Projekt- und handlungsorientierte Unterrichtsformen als vorrangiges Prinzip verankert.[4]
Geplante Schüler-Aktivitäten	Im Rahmen des Mathematikunterrichts bearbeiten die SuS verschiedene Lernumgebungen im Bereich der Arithmetik. Sie versuchen Muster bzw. Strukturen zu identifizieren, mit dessen Hilfe sie dann geeignete Strategien zur Lösungsfindung entwickeln. Die Entdeckungen sowie ihre Ergebnisse tragen die SuS in ein Forscherheft ein. Gewonnene Erkenntnisse werden reflektiert und im Rahmen einer Rechenkonferenz verbalisiert.
Evaluationsfrage (Behauptung)	Der Einsatz von Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule fördert die allgemeinen mathematischen Kompetenzen problemlösendes Denken und Kommunizieren sowie Argumentieren. Die Freude am „Mathematisieren" wird gestärkt.
Erfolgskriterien	Die SuS erweitern ihre Fähigkeit zum problemlösenden Denken sowie ihre Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren.
Indikatoren	Die Kinder verbessern sich in allen Kompetenzbereichen entsprechend ihrem jeweiligen individuellen Niveau. Dabei muss nicht von jedem Kind in jedem Teilbereich ein Fortschritt erreicht werden. Die Kinder trainieren bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben mathematisches Basiswissen. Sie erfassen

[2] Schulprogramm 2014, S. 26.
[3] Vgl. Europäisches Curriculum der Hessischen Europaschulen, 2010, S. 9.
[4] Vgl. ebd.

	mathematische Fragestellungen und können diese in eigenen Worten formulieren. Dabei finden sie verstärkt Problemlöse-strategien, entwickeln Lösungen und setzen diese um. Die SuS reflektieren gemeinsam über Ergebnisse und Lösungswege. Die Kinder machen Fortschritte bei der Beschreibung ihrer eigenen Vorgehensweise. In der Rechenkonferenz werden die Entdeckungen verbalisiert. Dabei werden verstärkt nachvollziehbare Begründungen unter selbständiger Nutzung von mathematische Zeichen und Fachbegriffe formuliert.
Datenerhebung/ Evaluations-methoden	Zur Auswertung werden die Prozessbeobachtungen, die Beobachtungsbögen der beteiligten Lehrkraft sowie die Forscherhefte herangezogen. Darüber hinaus wird auch ein Fragebogen eingesetzt.
Ergebnisse	Die Ergebnisse sind vielschichtig und in hohem Maße individuell. Sie variierten in ihrem Komplexitätsgrad ebenso wie in ihrem Anspruchsniveau, je nach Potential der Kinder. Entscheidend ist aber die Tatsache, dass bei allen Kindern ein Lernzuwachs erzeugt wurde. Eine Steigerung der Kompetenz Problemlösen ist in allen Bereichen festzustellen Über 80% der SuS fanden Problemlösungsstrategien und entwickelten Lösungen indem sie Gesetz- und Regelmäßigkeiten entdeckten. Diese Entdeckung aber vorteilhaft für ihren individuellen Rechenweg zu nutzen fiel einigen SuS noch schwer. Dieses Erschließen von Zusammenhängen nutzten für die Ermittlung ihrer Ergebnisse ca. 70 %. Auch das Kommunizieren und Argumentieren wurde erfolgreich gefördert, denn die SuS waren in der Lage, ihre Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgaben zu beschreiben sowie Begründungen zu formulieren. Die Kinder verwendeten im Laufe der Rechenkonferenzen zunehmend sicherer die mathematischen Fachbegriffe. Die SuS zeigten zudem großes Interesse, sich mit den Lernumgebungen auseinanderzusetzen und das Interesse für das Fach Mathematik konnte gesteigert werden.

2 Einleitung

Die mathematische Bildung stellt einen sehr wichtigen Bestandteil der Schulbildung dar. Die Wissensvermittlung hat das Ziel alle Kinder entsprechend ihren individuellen Anlagen zu fördern und zu fordern.

Die zunehmende Heterogenität in den Klassen erfordert eine Differenzierung des Unterrichts, um dem unterschiedlichen Leistungsvermögen aller Kinder gerecht zu werden. Sowohl die Leistungsschwächeren als auch die Leistungsstarken müssen optimal gefördert werden.

Vielfach entwickeln die Lehrkräfte Aufgabenangebote mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden (z. B. kategorisiert in leicht-mittel-schwer). Bei dieser Form von Differenzierung können wichtige allgemeine Kompetenzen aber nicht genug entwickelt und gefördert werden. Ein gemeinsames Bearbeiten der Aufgabenstellung und der Austausch bei diesen unterschiedlichen Vorgehensweisen und verschiedenen Lösungswegen kann nicht oder nur begrenzt stattfinden.

Ein Schwerpunkt in der Gestaltung des mathematischen Grundschulunterrichts wird zunehmend auf herausfordernde, produktive Übungsformate gelegt, an denen alle Schüler gemeinsam arbeiten. Eine Möglichkeit solcher produktiver Übungsformate stellen „Lernumgebungen“ dar. Aufgabenstellungen, die sowohl die Heterogenität der Kinder berücksichtigen als auch das aktiv-entdeckende Lernen begünstigen, werden als „Lernumgebungen“ bezeichnet. Langsam und schnell lernende Schüler werden hierbei innerhalb des fachlichen Themas integriert gefördert. Die Aufgaben können auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen gelöst werden. Dabei werden individuelle Denkwege und Darstellungsformen entwickelt. Schüler erleben einen anderen Zugang zur Mathematik.

In einer vierten Klasse wurden in diesem Schuljahr verstärkt Lernumgebungen im Bereich der Arithmetik eingesetzt. Der Fokus liegt darauf die Wirkungsweise der gewählten Lernumgebungen in der Praxis zu untersuchen, um Schlussfolgerungen für die Steigerung der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten und Kompetenzen im Unterricht der Grundschule zu ziehen.

3 Rahmenbedingungen und Hintergrundinformationen

3.1 Vorstellung der Schule

Die Blücherschule befindet sich im äußeren Wiesbadener Westend. So multikulturell und vielfältig wie das Einzugsgebiet zeigen sich auch die Schülerschaft und der Schulalltag. Derzeit besuchen 467 Schülerinnen und Schüler aus 36 Nationen die Blücherschule-Europaschule, womit der Anteil der Kinder mit Migrationshintergrund ca. 60% beträgt. Ein großer Anteil der Schülerinnen und Schüler stammt aus sozial schwachen Familien. In vielen Elternhäusern wird nur mangelhaftes Deutsch gesprochen. Die Bildungs- und Freizeitgestaltung beschränkt sich, wenn überhaupt, auf kostenlose Angebote.

Der Schulalltag ist geprägt durch diese heterogene Zusammensetzung hinsichtlich kultureller, finanzieller und sozialer Hintergründe der Kinder. Die Rahmenbedingungen stellt das 32 Lehrinnen und Lehrer umfassende Kollegium vor immer neue Herausforderungen. Unterstützt werden die Lehrer durch eine große Anzahl ehrenamtlicher Helfer, welche die Schule sowohl im Vormittagsbereich, als auch im Nachmittagsbereich mit ihrem Engagement unterstützen, um benachteiligte Kinder noch besser fördern zu können.

Aufgrund der vielfältigen Bedingungen entwickelte das Kollegium der Blücherschule ein pädagogisches Konzept und Schulprogramm. Im Jahr 2002 fand die pädagogische Arbeit besondere Anerkennung durch die Aufnahme der Blücherschule in das Landesprogramm der Europaschulen. Dies spiegelt sich in der pädagogischen Arbeit, im täglichen Umgang miteinander und in der Öffnung der Schule zu Institutionen wieder. Die pädagogische Arbeit ist geprägt durch interkulturelles Lernen als Unterrichtsprinzip.

Die Blücherschule ist seit dem Schuljahr 2015/16 eine teilgebundene Ganztagsschule mit einer verbindlichen Anwesenheitszeit an drei Unterrichtstagen von 8:00 bis 16:00 Uhr bzw. 17:00 Uhr, je nach Jahrgang, und an zwei Tagen von 8:00 bis 14:00 Uhr. Im Rahmen dieses Ganztagsprofils gibt es feste Unterrichts-, Spiel-, Pausen- und Projektzeiten. Im Gegensatz zu den Förder- und Betreuungsangeboten der offenen Ganztagsschule, die im Anschluss an den regulären Klassenunterricht meist jahrgangsübergreifend organisiert ist, wird die gebundene

Ganztagsschule in einem festen Klassenverband organisiert, um eine stärkere individuelle Förderung der kognitiven Entwicklung und der sozialen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu ermöglichen.[5]

Schülerinnen und Schüler, die noch nach dem offenen Ganztagskonzept unterrichtet werden, können am Mittagessen teilnehmen und bis 17:00 Uhr betreut werden. Für diese Kinder und auch alle anderen Schülerinnen und Schüler, die nicht das Betreuungsangebot der Schule nutzen, gibt es am Nachmittag ein vielseitiges Angebot an Lernzeiten (Hausaufgabenbetreuung) und Förderkursen sowie verschiedene Arbeitsgemeinschaften.

3.2 Verankerung im Schulprogramm

Grundlage des Schulprogrammes der Blücherschule ist das Curriculum der Hessischen Europaschulen. Diesbezüglich sind die Qualitätsbereiche fester Bestandteil des Schulprogrammes der Blücherschule.

Die Blücherschule verfolgt in ihrem Schulprogramm das Leitbild *Umgang mit Vielfalt aller Art*. Hierzu zählt u. a. der Umgang mit Interessen und Leistungen sowie Begabungen. Dabei wird Leistung als das „Ergebnis von kognitivem, sozialem und emotionalem Lernen verstanden."[6] Um der Vielfalt der Schülerinnen und Schüler gerecht zu werden, bietet die Blücherschule auch im regulären Unterricht unterschiedliche Projekte an. Im Fokus steht dabei die Förderung der Schülerinnen und Schüler nach ihren individuellen Fähigkeiten. Des Weiteren setzt die Blücherschule in ihrem Schulprogramm im Bereich *Lehren und Lernen* Schwerpunkte auf der Ebene der Methodenkompetenz. Im Hinblick auf das Methodencurriculum stehen im Rahmen der mathematischen Förderung das soziale und selbständige Lernen der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Die Bildungsbereiche im Schulprogramm differenzieren sich gemäß dem Europäischen Curriculum in vier Strukturelemente. Diese Strukturelemente bilden die zentralen Bildungsbereiche. Hierunter zu nennen sind die Kulturelle und

[5] www.bluecherschule.de – Ganztagsschule, Konzeption.
[6] Schulprogramm, 2014, S. 50.

Ästhetische Bildung, die Sprachliche Bildung, die Politische Bildung sowie die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bildung.[7]

Die durchgeführten Unterrichtssequenzen können der Förderung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Bildung zugeordnet werden, die der Forderung nach eigenverantwortlichen Arbeiten und Teamfähigkeit entgegenkommt.[8]

3.3 Bezug zum Europäischen Curriculum der Hessischen Europaschulen

Als zertifizierte Europaschule ist in das Leitbild der Blücherschule auch das Europäische Curriculum der Hessischen Europaschulen integriert. Im Hinblick auf die Förderung der mathematischen Kompetenzen ist vor allem die Erweiterung personaler, fachlich-methodischer und sozialkommunikativer Kompetenzen sowie die Ausbildung im Bereich der mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung von zentraler Bedeutung.[9]

3.4 Einordnung in den Hessischen Referenzrahmen Schulqualität

Das Unterrichtsvorhaben nimmt Bezug auf den Qualitätsbereich *VI. Lehren und Lernen* innerhalb des Hessischen Referenzrahmens Schulqualität. Dieser Bereich beinhaltet den Schwerpunkt Lehren und Lernen, beziehungsweise die Wirksamkeit und Weiterentwicklung des Unterrichts durch Vorgabe konkreter Qualitätskriterien. Damit Lernen für alle Schülerinnen und Schüler erfolgreich verläuft, müssen individuelle Lernvoraussetzungen berücksichtigt und der Aufbau eines lernförderlichen Klimas sowie die Möglichkeit des Erwerbs von fachlichen und überfachlichen Kompetenzen gewährleistet werden.[10] Von wesentlicher Bedeutung ist dabei, dass der Unterricht kognitiv herausfordernd und aktivierend ist.[11] Herausfordernde Aufgabenstellungen, die Anwendungsorientierung gewährleisten und Gelegenheiten zum Üben enthalten, schaffen die

[7] Vgl. Schulprogramm, 2014, S. 21.
[8] Vgl. ebd., S. 26.
[9] Vgl. Europäisches Curriculum der hessischen Europaschulen, 2010, S. 43ff.
[10] Vgl. Hessisches Kultusministerium Institut für Qualitätsentwicklung, 2009, S. 4.
[11] Vgl. Hessisches Kultusministerium Institut für Qualitätsentwicklung, 2009, VI.1.6.

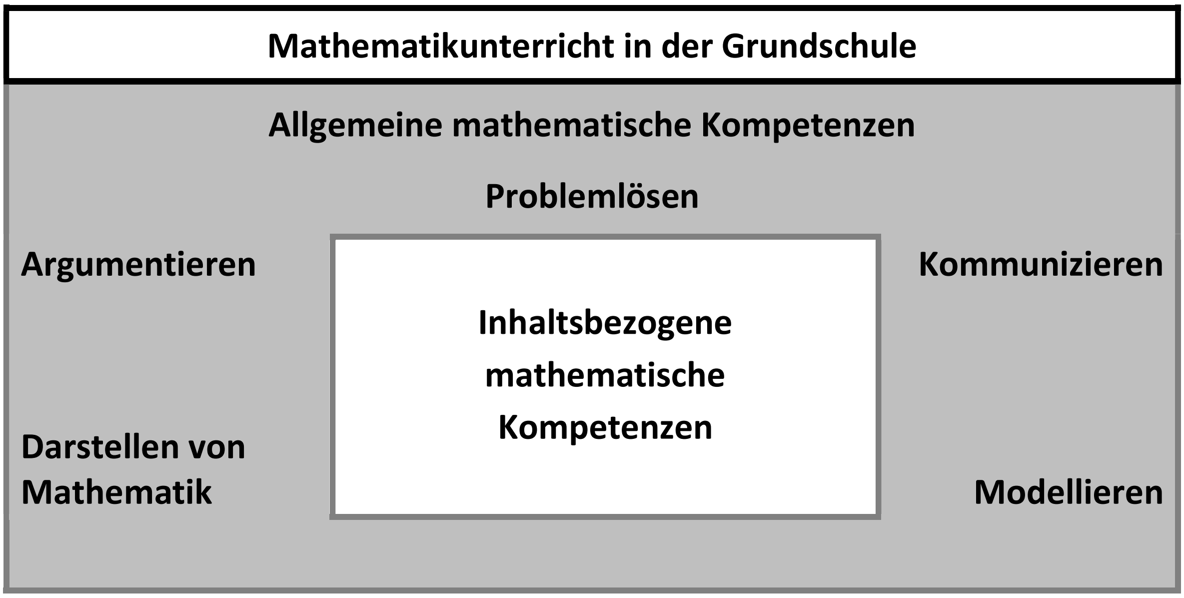
Voraussetzung dafür, dass neben fachlichen auch überfachliche Kompetenzen sowie Schlüsselqualifikationen entwickelt werden können.[12]

Im Rahmen des Projekts sollen die Schülerinnen und Schüler in kooperativen Lernarrangements durch herausfordernde aktivierende Lernumgebungen zum Erwerb von Kenntnissen und Kompetenzen gelangen.[13]

4 Vorstellung des Projekts

4.1 Theoretische Einführung

Die folgende Übersicht zeigt die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, welche die Schüler bis zum Ende des 4.Schuljahres erworben haben sollen.



Quelle: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004

Abbildung 1: Bildungsstandards im Fach Mathematik

Im Zentrum dieses Unterrichtsprojekts steht die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, insbesondere das problemlösende Denken der Schülerinnen und Schüler sowie Kommunizieren und Argumentieren durch den Einsatz von Lernumgebungen im Mathematikunterricht.

[12] Vgl. Hessisches Kultusministerium Institut für Qualitätsentwicklung, 2009, S. 23, VI.1.
[13] Vgl. ebd., S. 5.

Lernumgebungen

Ein Schwerpunkt in der Gestaltung des mathematischen Grundschulunterrichts wird auf herausfordernde produktive Übungsformate und die handelnde sowie verbale Auseinandersetzung mit Problemstellungen gelegt. Mit Hilfe einer natürlichen Differenzierung soll dabei der Heterogenität der Grundschule positiv begegnet und die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für möglichst alle Kinder umgesetzt werden.

Die Kinder arbeiten dabei alle am selben mathematischen Schwerpunkt mit seiner spezifischen fachlichen Struktur, aber individuell nach ihrem eigenen Lerntempo und ihren ganz persönlichen Fähigkeiten. Kern- und Ausgangspunkt kann dabei eine innermathematische Struktur, ein mathematisches Muster oder ein mathematisches Problem sein. Dies gilt es zu erforschen, fortzusetzen, auszugestalten oder zu lösen. Diese Aufgabenstellungen, die sowohl die Heterogenität der Kinder berücksichtigen und dadurch einen Zugang für alle Kinder bieten, als auch das aktiv-entdeckende Lernen begünstigen, werden als „Lernumgebungen" bezeichnet. „Solche Aufgaben sind auf unterschiedlichen Verständnis- bzw. Abstraktionsebenen lösbar und fordern das Entwickeln persönlicher Denkwege und Darstellungsformen heraus."[14]

„Eine Lernumgebung ist eine flexible große Aufgabe. Sie besteht in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen, die durch bestimmte Leitgedanken – immer basierend auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur – zusammengebunden sind."[15] Lernumgebungen sind somit gehaltvolle Phänomene, denen es nachzuspüren und die es zu erkunden gilt. Im Grunde ist es eine Erweiterung des Begriffs „Aufgabe", nämlich eine Unterrichtssituation mit Zielen, Inhalten und Vorgehensweisen. Das Konzept der Lernumgebung basiert auf einer konstruktivistischen Grundposition und einer Anerkennungskultur.

Lernumgebungen ermöglichen aktiv-entdeckendes, selbstbestimmtes sowie soziales Lernen im Austausch miteinander.

[14] Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung/ Berlin (Hrsg.), 2009, S. 3.
[15] Hirt / Wälti, 2014, S. 13.

Aufgaben einer mathematischen Lernumgebung sollen

- offen und reichhaltig sein und damit eine natürliche Differenzierung ermöglichen,
- ein hohes kognitives Aktivierungspotential haben,
- zur Eigentätigkeit anregen – Orientierung der Tätigkeit an mathematischen Inhalten und Prozessen,
- individuelle Denk- und Lernwege sowie eigener Darstellungsformen fördern,
- Fachgespräche auslösen,
- sozialen Austausch und Kommunikation über Mathematik anregen,
- sich auf Kompetenzerwerb und mathematische Tätigkeit ausrichten.

Inhalt jeder Lernumgebung ist darüber hinaus der Austausch über gewonnene Erkenntnisse. Eine mögliche Methode dazu ist die Rechenkonferenz, die sich in drei Phasen teilt. Die Ich-Phase, bei der jedes Kind sich seine Arbeitsergebnisse noch einmal genau ansieht und sich überlegt, wie es seine Erkenntnisse anderen erklären und verständlich machen könnte. Die Du-Phase, in der sich jedes Kind mit seinem Banknachbarn über die jeweiligen Überlegungen und Entdeckungen austauscht. Und die Wir-Phase, in der die Erkenntnisse im Plenum der Klasse zusammengetragen, besprochen und analysiert werden.

4.2 Umsetzung in der Praxis

3 Phasen Modell zur Erarbeitung von Lernumgebungen **nach Hirth und Wälti (2014):**

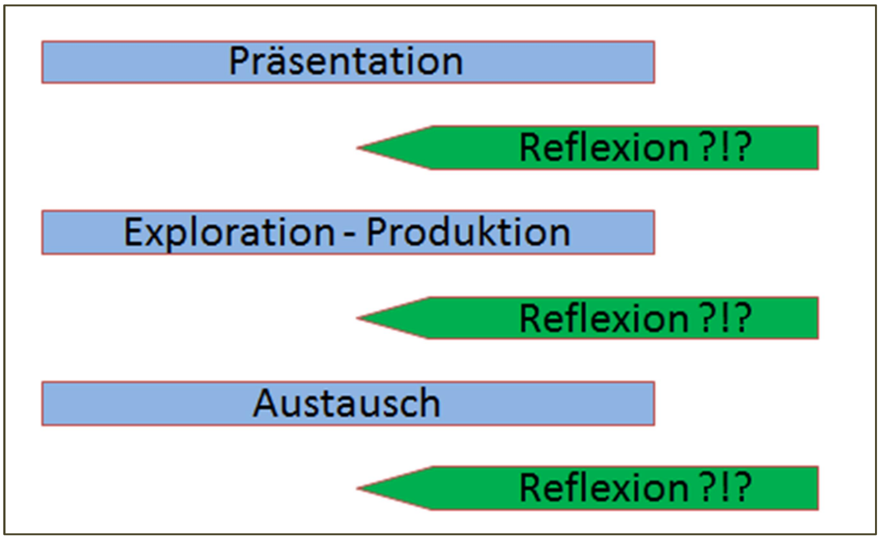


Abbildung 2: 3 Phasen Modell zur Erarbeitung von Lernumgebungen

Die Erarbeitung von Lernumgebungen teilt sich grob in 3 Phasen:

Präsentation des mathematischen Sachverhalts

Zu Beginn wird die Lernaufgabe kurz, klar und verständlich präsentiert. Die auszuführende Tätigkeit, die Ziele und Erwartungen werden geklärt. Der Rahmen wird abgesteckt, Regeln erklärt und der Freiraum beim mathematischen Tun wird definiert. Die Präsentation erfolgt informativ sowie frontal und dauert nur wenige Minuten.

Exploration und Produktion

An dieser Stelle findet eine längere Phase der Eigenaktivität der Schüler, auf ihrem jeweils individuellen Niveau, statt. Dabei aktivieren sie Voraussetzungen, nutzen den Freiraum zum Denken und bringen ihre Erfahrungen ein. Am Ende dieser Phase produzieren alle Schüler Rechnungen oder Daten und arbeiten im Bereich grundlegender Fertigkeiten.

Austausch und fachlicher Dialog

Die letzte Phase ist ein organisierter Austausch in unterschiedlichen Formen. Besprochen werden Vorgehensweisen und Feststellungen der inhaltlichen Erkenntnisse. Das Ziel ist eine gemeinsame Ebene der Arbeitsweisen zu erreichen.

Zwischen den Phasen kann je nach Bedarf eine Reflexion eingeschoben werden.

Auf Grundlage der allgemeinen Einteilung von Hirth und Wälti wurde dieses 3 Phasen-Modell in der Praxis weiter ausgebaut.
Im Nachfolgenden wird dieser bewährte Aufbau von Unterrichtsstunden zur Erarbeitung von Lernumgebungen beschrieben.
Bei der Durchführung des Projektes wurde sich an diesen Aufbau in den Stunden orientiert.

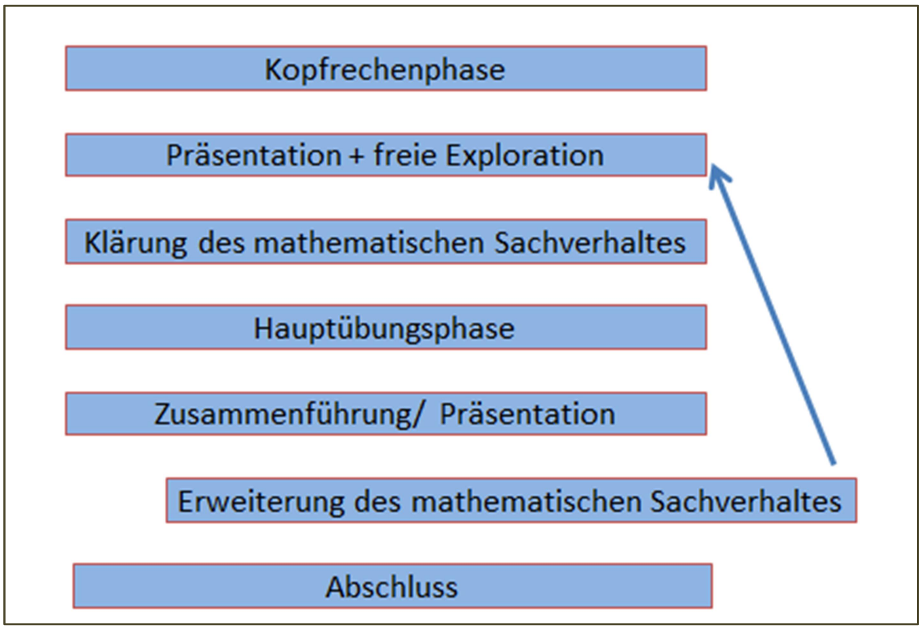


Abbildung 3: Aufbau zur Erarbeitung von Lernumgebungen

Zu Beginn jeder Mathematikstunde findet eine kurze **Kopfrechenphase** statt. Oberstes Ziel der Kopfrechenphase ist nach Wieland (2012) die Automatisierung basaler Rechenfertigkeiten, da diese eine Notwendigkeit für jedes weiterführende entdeckende Lernen darstellen. Nur wenn diese Wissensbestände systematisch geübt werden, können sie jederzeit spontan abgerufen werden, ohne Speicherkapazität und erhöhte Denkleistung zu beanspruchen, die wiederum für das problemlösende Denken benötigt werden. Ziel ist es also einfache Rechenoperationen zu automatisieren, um somit komplexere Aufgaben durch eine möglichst hohe Routine zu entlasten.

In der Phase der **Exploration** setzen sich die Schülerinnen und Schüler zunächst einmal jeder für sich, nach seinem eigenen Tempo und zudem ganz unvoreingenommen mit dem mathematischen Sachverhalt auseinander. Dabei machen die Kinder ganz individuelle Entdeckungen. Die Herausforderung dieser Phase stellen die versteckten Strukturen dar und in einem weiteren, späteren Schritt die Verbalisierung ihrer Erkenntnis.

Der Austausch über das Entdeckte ist sehr wichtig, was im nächsten Schritt, der **Klärung des mathematischen Sachverhaltes** erfolgt. Gewisse Auffälligkeiten werden vielleicht nur von wenigen Kindern erkannt. Bereits an dieser Stelle werden Entdeckungen reflektiert, um neue Erkenntnisse zu gewinnen, andere Lösungswege zu verstehen oder eventuelle Fehler zu entdecken. Ziel dieser Phase ist es, das gesamte Aufgabenformat und die darin entdeckte Struktur nochmals zu durchdenken und intensiver zu durchdringen. Klassisch ist hierfür die Struktur des „Ich-Du-Wir-Prinzips“. Hierbei durchdenken die Kinder zunächst nochmals für sich selbst was sie entdeckt haben, oder wie sie beim Rechnen einer Aufgabe vorgegangen sind (Ich-Phase). In einem weiteren Schritt erklären sie ihre Feststellungen einem Partner, beziehungsweise tauschen sich mit diesem aus oder diskutieren (Du-Phase). Seinen Abschluss findet dieses mathematische Gespräch in der Gruppe, in welcher der rege Austausch fortgesetzt werden soll. Somit werden allen Schülern alle Ergebnisse unterbreitet (Wir-Phase). Um möglichst alle Kinder in die Unterhaltung über die mathematischen Erkenntnisse einzubeziehen findet die Wir-Phase in der Regel im Plenum statt.

In der **Hauptübungsphase** sollen die Schülerinnen und Schüler zielführend arbeiten. Dazu wird ihnen zu Beginn dieser Phase ein spezieller Forscherauftrag vorgegeben. Ähnlich wie in der Phase der freien Exploration birgt das Aufgabenformat eine natürliche Differenzierung, da jedes Kind seinen individuellen Weg zur Lösung des gestellten Problems wählt.

In der **Zusammenführung** wird die Hauptübungsphase durch die Rechenkonferenz mit der Struktur des „Ich-Du-Wir-Prinzips“ beendet. Die Ziele sind dabei das erneute Durchdenken, der Austausch und die Diskussion über die vorliegende Aufgabe und letztlich ein mathematisches Gespräch. Das Zusammentragen der individuellen Vorgehensweisen ist sehr wichtig, um diese möglichst allen Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen. Damit erfolgt eine quantitative, als auch qualitative Erweiterung der mathematischen Sache.

Mit der **Erweiterung des mathematischen Sachverhaltes** wird das Thema anspruchsvoll fortgesetzt und gefestigt. Erkannte Strukturierungsmöglichkeiten werden auf höherem Niveau fortgesetzt. Leistungsstarke Schüler können hier zusätzlich gefördert werden.

Im **Abschluss** wird auf die Bedeutung solcher Knobelaufgaben eingegangen. Die Kinder sollen erkennen, dass solche Stunden und Übungsformate einen tieferen Sinn haben.

4.3 Auswahl der Lernumgebungen

Die folgende Abbildung zeigt die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in der Grundschule.

Mathematikunterricht in der Grundschule

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Zahlen und Operationen
Raum und Form
Muster und Strukturen
Größen und Messen
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Quelle: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004

Abbildung 4: Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen der Grundschule

Die folgende Tabelle bietet eine Übersicht über die im Rahmen des Projektes erprobten Lernumgebungen im Bereich der Arithmetik. Diese lassen sich zwei von den fünf oben genannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen zuordnen.

Inhaltsfelder	Thema	Anzahl Unterrichts-stunden	Kompetenzbereiche
Zahlen und Operationen; Muster und Strukturen	Strukturierte Päckchen	3	Problemlösen Kommunizieren Argumentieren
	Magische Quadrate mit 4 x 4 Zahlen	3	
	Zahlenfeld	4	
	Pentominos auf der Hundertertafel	3	

Die Aufgaben, die den vorliegenden Stunden zu Grunde liegen, stellen Forscheraufgaben im besten Sinne dar. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich dabei mit jeweils einem gegebenen Objekt auseinandersetzen und versuchen Muster bzw. Strukturen zu identifizieren, mit dessen Hilfe sie dann geeignete Strategien zur Lösungsfindung entwickeln.
Dabei wird die Vorgehensweise im Unterricht für alle Themen nach dem unter Punkt 4.2 beschriebenen Phasen gestaltet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird anhand einer Unterrichtseinheit aus dem Thema Zahlenfeld detailliert die Umsetzung einer Lernumgebung exemplarisch beschrieben. Eine Übersicht über die weiteren erprobten Lernumgebungen mit Kurzbeschreibung sowie ausgewählte Schülerdokumente findet sich im Anhang ab Seite 55.

5 Vorstellung der Klasse

5.1 Zusammensetzung

Die vierte Klasse besuchen 19 Kinder, 11 Mädchen und 8 Jungen im Alter von 9 bis 11 Jahren. Insgesamt ist diese Klasse eine lebendige und lernfreudige Lerngruppe. Der Großteil der Kinder ist bereits gut in der Lage, die eigene Meinung und Gedanken zu formulieren sowie auf die Antworten der Mitschüler einzugehen. Die Mitarbeit während des Unterrichts ist meist gut. Dennoch benötigen einige Kinder hin und wieder eine Erinnerung, sich am Unterricht durch Wortmeldung zu beteiligen. Das Arbeitstempo in der Klasse ist sehr unterschiedlich. Arbeitsaufträge werden von den meisten Schülerinnen und Schülern direkt umgesetzt. Einige brauchen aber immer wieder individuelle Unterstützung um mit der Arbeit beginnen zu können. Mehr als ein Drittel der Kinder weist einen Migrationshintergrund auf. Nur bei wenigen zeigen sich sprachliche Defizite, welche sich auch auf die Leistungen auswirken. Verständnisschwierigkeiten und vereinzelte Unsicherheiten im deutschen Sprachgebrauch zeigen sich bei zwei Schülern. Ihnen fehlt häufig der Wortschatz, um mathematische Sachverhalte zu beschreiben und zu erklären. Folglich bereiten ihnen auch in Mathematik längere Aufgabenstellungen sowie

Textaufgaben große Schwierigkeiten. Fachbegriffe können sie sich nur schwer merken. Beide Schüler sind dennoch an Unterrichtsthemen sehr interessiert und bemüht, die Anforderungen auf ihrem Niveau zu erfüllen.
Die Leistungen im Fach Mathematik fallen sehr heterogen aus. Einige Schüler sind bereits gut in der Lage, Zusammenhänge zu erkennen, herzustellen und selbständig zu arbeiten. Die gewonnen Erkenntnisse zu verbalisieren fällt vielen Schülerinnen und Schülern der Klasse noch schwer. Nur wenige Kinder sind bisher in der Lage, ihre Ergebnisse zu begründen und darüber zu reflektieren.

5.2 Lernausgangslage

Die Übersicht der Lernausgangslage der Klasse ist im Anhang auf den Seiten 42 bis 44 dargestellt.

6 Ziele

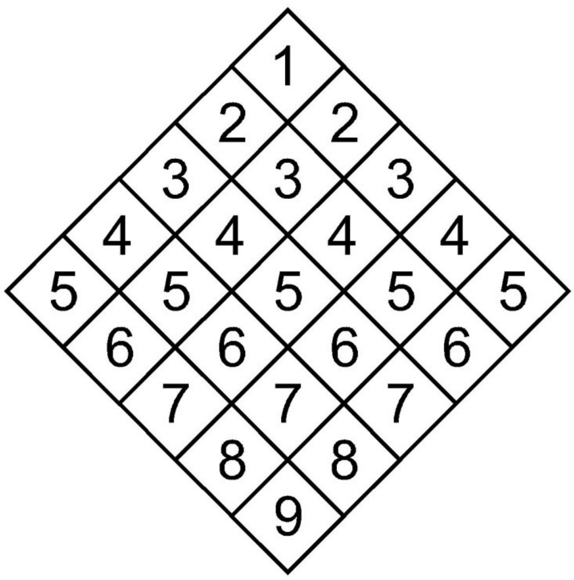
Im Mittelpunkt des Projektes steht die Förderung der mathematischen Kompetenzen, insbesondere das problemlösende Denken der Schüler. Darüber hinaus sollen die Schüler ihre Entdeckungen verbalisieren und dabei plausibel und logisch begründen, was letztlich ihre Kompetenzen zum Kommunizieren und Argumentieren schult.
Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler arithmetische Muster und Strukturen erkennen und diese entsprechend ihrer Fähigkeiten zum geschickten Rechnen nutzen. Darüber hinaus soll die Fähigkeit, mathematische Strukturen, Muster und Zusammenhänge zu beschreiben, weiter entwickelt werden, indem die gewonnenen Erkenntnisse reflektiert und im Rahmen einer Rechenkonferenz verbalisiert werden. Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeit des Transferdenkens schulen, indem sie mit Hilfe der entdeckten Strukturen eine Strategie entwickeln, um die jeweiligen Forscheraufgaben möglichst geschickt zu lösen.
Im Ergebnis soll bei allen Schülerinnen und Schülern die Freude am Mathematisieren gestärkt und eine positive Einstellung zu diesem Fach entwickelt werden.

7 Beschreibung des Unterrichtsprojekts

7.1 Das gewählte Thema – Das Zahlenfeld

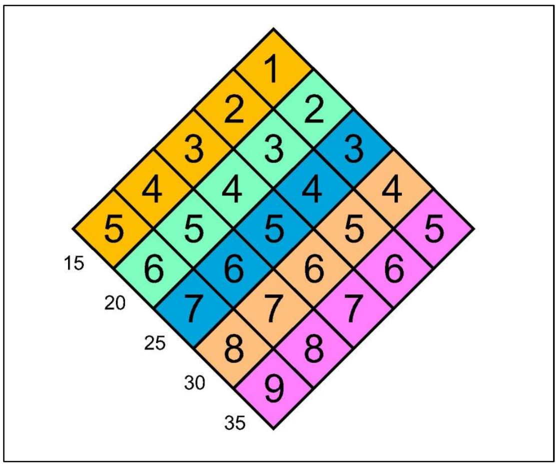
Eine mögliche Lernumgebung stellt die Erforschung des Zahlenfeldes dar. Als Zahlenfeld bezeichnet man die Anordnung von Zahlen in einer unbestimmten oder auch bestimmten Art und Weise. Die bestimmten Zahlenfelder haben dabei immer ein gewisses System oder eine bestimmte Struktur.
Alltägliche, strukturierte Zahlenfelder mit den Zahlen von 0 bis 9 sind dabei beispielsweise die Tastatur des Telefons oder des Taschenrechners.
Eines der bekanntesten mathematischen Zahlenfelder ist die Hundertertafel, in der die Zahlen von 1 bis 100 systematisch und somit auch übersichtlich angeordnet sind. Weitere mathematische Zahlenfelder sind beispielsweise Zauberquadrate, denen ebenso wie etwa Sudoku-Feldern eine Anordnungsregel zugrunde liegt und die unter Berücksichtigung dieser Regel sehr unterschiedlich aussehen können.
Zahlen können nicht nur in der Form eines Quadrates angeordnet sein. Auch dreieckige Anordnungen sind möglich, beispielsweise beim Pascal'schen Dreieck.

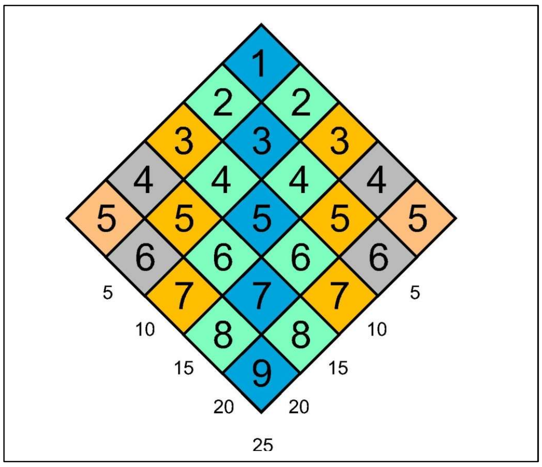
Für die vorliegende Stunde wurde ein Zahlenfeld in Rautenform gewählt. Dieses wird in der verwendeten Literatur nicht näher bezeichnet, weshalb im Folgenden auch nur von einem Zahlenfeld gesprochen, sich aber dabei auf die folgende Zahlenanordnung bezogen wird:



Dem vorliegenden Zahlenfeld liegt folgende Struktur zu Grunde[16]:

- 25 systematisch angeordnete Zahlen von 1-9, die unterschiedlich häufig vorkommen.
- In jeder Zeile[17] findet man ausschließlich gleiche Zahlen.
- In jeder Spalte findet man andere Zahlen.
- Die Ergebnisse der ersten 5 Zeilen sind Quadratzahlen: 1, 2 x 2, 3 x 3,…
- Die 5 ist die häufigste Zahl und kommt 5 Mal vor. Nach der 5 nimmt die Anzahl der einzelnen Zahlen wieder ab.
- In den (diagonalen) Reihen sind die Zahlen fortlaufend angeordnet, z. B. 1, 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6, 7.
- Am Rand des Zahlenfeldes findet man fortlaufend die Zahlen 1-9, sowohl auf der rechten, als auch auf der linken Seite.
- Untereinander, in den Spalten, stehen entweder nur gerade oder ungerade Zahlen.
- Addiert man jeweils die 5 Zahlen einer Reihe, so stellt man fest, dass die Summen immer um 5 wachsen (linke Abbildung).





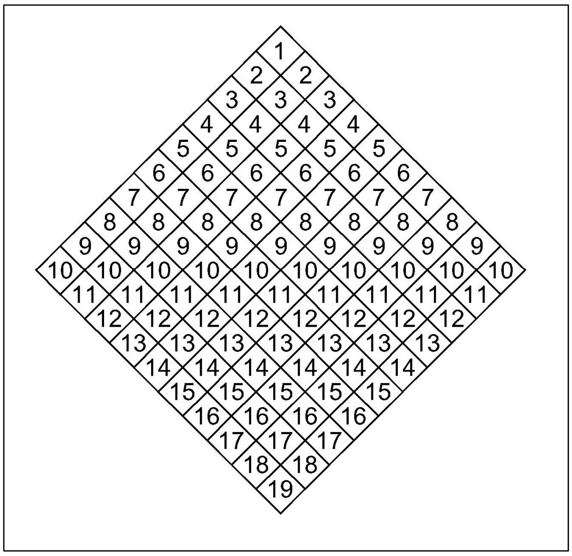
- Addiert man die Zahlen einer Spalte, ergibt sich das Gleiche (rechte Abbildung).
- Halbiert man das Zahlenfeld senkrecht, so erkennt man, dass die Zahlen rechts und links von der Mittelspalte symmetrisch angeordnet sind und dadurch gleiche Summen bilden.
- Wenn man in den Spalten jeweils zwei Zahlen addiert, so dass die Summe 10 ergibt (1+9, 2+8 (2x), 3+7 (3x),…), so erhält man 10 x 10 = 100.
- Die Gesamtsumme des Zahlenfeldes ist 125 (10 x 10, plus 5 x 5).
  - Ein geschicktes Verfahren zur Berechnung der Summe wäre das Bilden von Pärchen, die jeweils 10 ergeben. (1+9, 2+8 usw.) Es gibt 10 solcher Pärchen (= 100). Dazu muss noch die 5 mal 5 (= 25) aus der mittleren Reihe addiert werden.
  - Eine andere Möglichkeit ist das Errechnen der Zeilensummen. Diese werden dann wiederum aufsummiert.

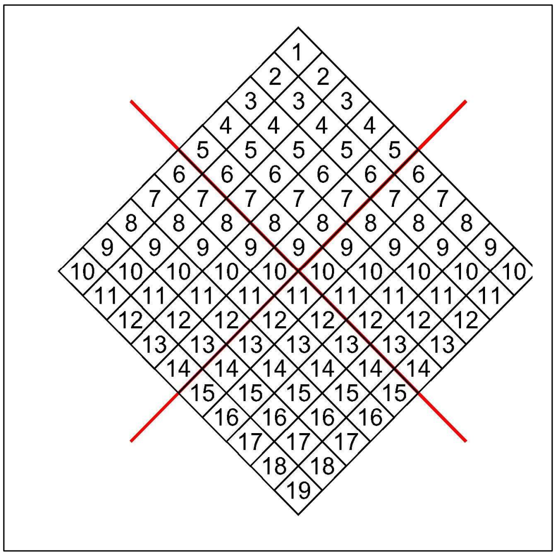
[16] Vgl. Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung/ Berlin (Hrsg.), 2009.
[17] Zur Begriffsverwendung siehe S. 23.

<u>Der Zahlenraum und die mögliche Erweiterung des Zahlenfeldes</u>

Der Zahlenraum, den das Zahlenfeld abdeckt, erstreckt sich zunächst nur bis knapp über 100. Diese kleinen Zahlen sind vielleicht rechnerisch nur noch für die leistungsschwächeren Schüler eine Herausforderung, doch sind sie wichtig, um den Kindern die Chance zu geben, die verborgene Struktur überhaupt erkennen zu können. Nur wenn der Zahlenraum einer Forscheraufgabe überschaubar ist und die darin enthaltenen Rechnungen weitestgehend automatisiert sind, bleiben Kapazitäten im Denkprozess für das problemlösende Denken. Das heißt, der Zahlenraum wird überschaubar gewählt, um die komplexe Aufgabe zu entlasten.

Sind diese Regelmäßigkeiten erst einmal erarbeitet und verbalisiert, so besteht immer noch die Möglichkeit den Zahlenraum des Übungsformates zu erweitern, indem man das Zahlenfeld erweitert.
Eine Möglichkeit zur Erweiterung sieht wie folgt aus (linke Abbildung):





Das Feld kann auch auf andere Weise erweitert werden und es wäre denkbar, dies den Kindern sogar als Kreativaufgabe zu stellen. Dann jedoch muss auch das Weiterarbeiten mit dem Zahlenfeld sehr individuell erfolgen, da nicht alle Kinder an der gleichen Ausgangssituation weiterarbeiten.
Geht man von der oben dargestellten Erweiterung aus, so bewegt man sich nun im Zahlenraum bis 1000 (Gesamtsumme). Die in der Struktur aufgeführten

Regelhaftigkeiten gelten unter der Berücksichtigung der Erweiterung auch für das identisch aufgebaute große Zahlenfeld, sozusagen auf „höherem Niveau“.

Zusätzlich ergeben sich für das erweiterte Zahlenfeld weitere feststellbare Besonderheiten:

- Teilt man das Zahlenfeld in vier kleine Felder, so sind das linke und das rechte Zahlenfeld identisch.
- Die beiden identischen Zahlenfelder ergeben in der Summe jeweils 250.
- Die Summe des unteren Zahlenfeldes ist um genau 250 größer als die des oberen Zahlenfeldes, da die Zahlen in den 25 Feldern jeweils um 10 größer sind. Demnach ist die Summe des unteren Feldes 375.
- Die Gesamtsumme des erweiterten Zahlenfeldes beträgt 1000 (125+250+250+375).

7.2 Übersicht über die Unterrichtseinheit

1. UE: Die Raute als geometrische Fläche

2. UE: Die Raute als Zahlenfeld

→ Wir erforschen das Zahlenfeld und rechnen geschickt

3. UE: Wir erforschen das erweiterte Zahlenfeld

4. UE: Wir rechnen wie Carl Friedrich Gauß

7.3 Vorbereitung der Stunde

Hinsichtlich der Rechenfertigkeiten könnten in dem verwendeten Übungsformat des Zahlenfeldes auch größere Zahlen verwendet werden, doch lassen sich die vorhandenen Strukturen dann wesentlich schwerer erkennen.

Für die vorliegende Stunde ist eine Klärung der spezifischen Begrifflichkeiten, hinsichtlich der rautenförmigen Darstellung des Zahlenfeldes wichtig. Daher wurden im Vorfeld geometrische Formen wiederholt und die Raute im Besonderen betrachtet. In einem zweiten Schritt haben die Kinder die Raute als Zahlenfeld, wenn auch noch ohne Zahlen und mit weniger Feldern als 4x4-Gitter, kennengelernt. Dabei wurden die Begriffe Diagonale, Zeile und Spalte von bereits bekannten Zahlenfeldern, wie beispielsweise den Zauberquadraten, übertragen.

Die Begriffe wurden dabei wie folgt festgelegt:

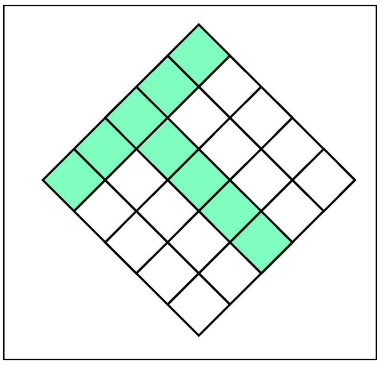


Bild 1: Diagonalen

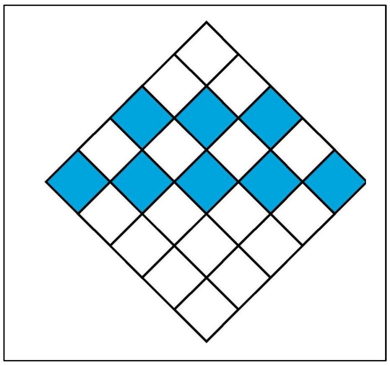


Bild 2: Zeilen

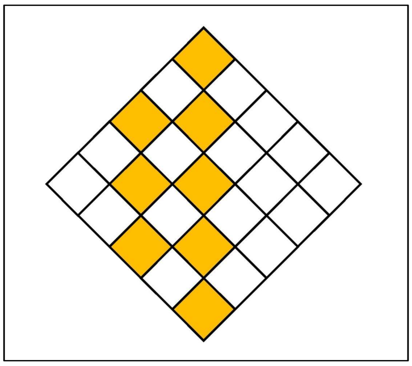


Bild 3: Spalten

Bild 1 zeigt die erste Diagonale von rechts oben nach links unten und die dritte Diagonale von links oben nach rechts unten. In Bild 2 sind die dritte Zeile als auch die fünfte Zeile (= Mittelzeile) markiert, sowie in Bild 3 die dritte und die fünfte Spalte, wobei letztere auch als Mittelspalte bezeichnet werden kann.

Um diese Begriffe einzuüben und zu festigen, wurden dann in die leeren Felder wahllos und ohne ein bestimmtes System Zahlen diktiert und eingetragen sowie kleine Zahlenrätsel gestellt.

Im Vorfeld der Stunde wurde bewusst auf das Wiederholen geschickter Rechenstrategien verzichtet, da sonst die Gefahr bestünde, dass die Summe des Zahlenfeldes nicht mehr unvoreingenommen und aktiv-entdeckend berechnet werden würde.

7.4 Der Unterrichtsverlauf

Kopfrechenphase – unstrukturiertes, formales Üben

Als motivierender Faktor für das Trainieren von einfachen Rechenoperationen wird das Format des BINGOs gewählt.

Die Kinder müssen, um überhaupt am BINGO-Spiel teilnehmen zu können, zunächst neun Kopfrechenaufgaben möglichst richtig lösen, was zu einer entsprechend hohen Motivation bezüglich der Teilnahme am Kopfrechnen führt.

Darüber hinaus stellt auch das BINGO-Feld ein Zahlenfeld dar und die Kinder nehmen bereits Spalten und Zeilen war, was im späteren Verlauf, wenn auch in leicht veränderter Form, wieder von Bedeutung ist. Für die vorliegende Kopfrechenphase werden bewusst nur Additions- und Multiplikationsaufgaben gestellt, da diese beiden Rechenoperationen im weiteren Stundenverlauf benötigt werden.

Freie Exploration

In der Phase der Exploration sollen die Schüler sich zunächst einmal jeder für sich, nach seinem eigenen Tempo und zudem ganz unvoreingenommen mit dem mathematischen Sachverhalt – in diesem Fall dem rautenförmigen, strukturierten Zahlenfeld – auseinandersetzen.

Dabei machen die Kinder ganz individuelle Entdeckungen. Die leistungsschwächeren Kinder nehmen eventuell zunächst einmal wahr, dass es sich um eine Raute handelt, die 25 Felder mit den Zahlen von 1-9 hat. Während dieser Zeit haben die leistungsstarken Schüler vielleicht bereits entdeckt, dass man in diesem Feld auch mathematische Strukturen entdecken kann. Es ist davon auszugehen, dass die Entdeckungen sehr individuell sein werden, dass also eine Differenzierung durch den Lehrer aufgrund des Aufgabenformates überflüssig sein wird. Lediglich die Impulsfragen „Was siehst du?“ und „Was fällt dir auf?“ sollen den Kindern ein Anstoß sein.

Gewisse Auffälligkeiten werden den Kindern sehr schnell ins Auge fallen, während andere vielleicht unentdeckt bleiben oder nur von einigen wenigen erkannt werden. Aus diesem Grund ist der Austausch über das Entdeckte sehr wichtig, was im nächsten Schritt, der Klärung des mathematischen Sachverhaltes erfolgt.

Klärung des mathematischen Sachverhalts

Nach einer Phase der Erkenntnis erfolgt eine Phase des Austausches, um Entdeckungen zu reflektieren oder darauf aufmerksam gemacht zu werden, neue Erkenntnisse zu gewinnen, andere Lösungswege zu verstehen und das gesamte Aufgabenformat und die darin entdeckte Struktur nochmals zu durchdenken und intensiver zu durchdringen.

Besonders geeignet ist hierfür die Struktur des „Ich-Du-Wir-Prinzips“, welches angewendet werden soll. Dieser Austausch ist zunächst einmal wichtig, um den mathematischen Sachverhalt zu klären. Den Schülern soll bewusst werden, um was es in der heutigen Stunde überhaupt geht. Die bis dahin individuellen

Entdeckungen sollen möglichst allen Kindern zugänglich gemacht werden. Dies führt zu einer quantitativen Vertiefung des Sachverhaltes, da mitunter auch Aspekte angesprochen werden, die nicht von jedem Kind erkannt wurden. Durch die wiederholte Erklärung von bereits Entdecktem kommt es darüber hinaus auch zu einer qualitativen Vertiefung. Letztlich soll durch den Austausch der Kinder und die Veranschaulichung der Erkenntnisse aber vor allem eine weitestgehend gleiche Ausgangslage hinsichtlich des Wissensstandes geschaffen werden, so dass mit dem vorliegenden Übungsformat weiter gearbeitet werden kann.

Nicht zu vernachlässigen ist jedoch auch der Aspekt, dass die individuellen Entdeckungen jedes einzelnen Kindes gewürdigt und die Schülerinnen und Schüler in ihrer Entdeckertätigkeit bestärkt werden sollen. Dadurch gewinnen die Kinder zunehmend Selbstsicherheit hinsichtlich des Umgangs mit mathematischen Sachverhalten oder Problemen und verbessern zugleich ihre Ausdrucksfähigkeit und ihre mathematische Sprachkompetenz.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die im Plenum besprochenen Entdeckungen nochmals auf ihrem eigenen Blatt nachvollziehen und gegebenenfalls auch dort markieren, da die darauf folgende Forscheraufgabe auch auf diesem Blatt erledigt werden soll. Hierbei können die Markierungen gleich sinnvoll genutzt werden und sind den Kindern eine Hilfestellung.

Hauptübungsphase - strukturiertes, reflektiertes Üben

Das IPN (2004) fordert dazu auf, die Bedeutung, den Reiz und den Nutzen von Mathematik erfahrbar zu machen, damit Mathematik letztlich auch verstanden werden kann.[18]

Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Stunde auf die Einkleidung von Aufgaben in Rahmengeschichten oder die Herangehensweise an mathematische Probleme mit Hilfe einer Identifikationsfigur verzichtet. Stattdessen wird der reine mathematische Sachverhalt in den Mittelpunkt der Unterrichtseinheit gestellt. Da die Kinder während der Hauptübungsphase nur dann zielführend arbeiten können, wenn sie ihr Ziel kennen, wird dieses zu Beginn dieser Phase in Form eines speziellen Forscherauftrages vorgegeben. Zwar wäre es wünschenswert, dass die

[18] Vgl. Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik – IPN (Hrsg.), 2011.

Kinder den nächsten Arbeitsschritt selbst erkennen, doch müssten sie dazu im vorliegenden Fall die komplette Struktur des Zahlenfeldes und die damit verbundenen Arbeitsmöglichkeiten im Blick haben. Mit dem Auftrag, die Summe des Zahlenfeldes möglichst geschickt, beziehungsweise auf einem schlauen Weg auszurechnen, starten die Kinder in die Hauptübungsphase und finden ihren individuellen Weg, den Forscherauftrag zu erfüllen. Dabei wird der Forscherauftrag zwar vorgelesen, aber nicht näher erklärt, um den Kinder nichts vorwegzunehmen und sie nicht in eine bestimmte Richtung der Berechnung zu leiten. Aufgrund dieser individuellen Herangehensweise und Auseinandersetzung mit dem Problem wird auf eine lehrergeleitete qualitative Differenzierung verzichtet. Ähnlich wie in der Phase der freien Exploration birgt das Aufgabenformat eine natürliche Differenzierung, da jeder Schüler seinen individuellen Weg zur Berechnung der Summe wählt.

Um Leerlauf zu vermeiden und die folgende Phase der Zusammenführung vorzubereiten, werden zwei quantitative Differenzierungsaufgaben gestellt. In der ersten sollen die Schüler darüber reflektieren, wie sie die Summe berechnet haben. Weiterhin sollen sie erklären, wie sie vorgegangen sind. Es wird jedoch keine Vorgabe gemacht, wie die Kinder ihre Erkenntnis festhalten oder verschriften. Einziges wichtiges Kriterium ist, dass es den Schülern selbst hilft und die Fixierung in ihrer individuellen Art zur Reflexion anhält.

Die zweite quantitative Differenzierung wiederum ist eine Art Qualitätssicherung der späteren Rechenkonferenz, vor allem der Wir-Phase. Hierbei werden die Schüler aufgefordert sich zu überlegen, ob es noch weitere Möglichkeiten gibt, die Summe zu berechnen.

Da die individuelle Denkweise und Lösungsfindung oftmals sehr eingefahren ist, werden bei dieser Differenzierungsaufgabe Denkanstöße in Form von farbigen Markierungen im Zahlenfeld gewährt. Diese sollen nichts vorwegnehmen oder verraten. Sie sollen lediglich den Blick vom eigenen Lösungsweg zu weiteren Lösungsmöglichkeiten hin weiten und ihn zugleich schärfen, um nicht wahllos und unstrukturiert vorzugehen und letztlich die Motivation zu verlieren.

Zusammenführung

Die Hauptübungsphase wird durch die Rechenkonferenz mit der den Kindern bekannten Struktur des „Ich-Du-Wir-Prinzips“ beendet.

Wie erklärt, sind die Ziele dabei das erneute Durchdenken, der Austausch und die Diskussion über die vorliegende Aufgabe und letztlich ein mathematisches Gespräch.

Die Erkenntnisse der Kinder sollen während der Wir-Phase an der Tafel festgehalten werden. Da als eine der größten Schwierigkeiten die Verbalisierung der Entdeckungen erwartet wird, sollen die Kinder dabei zum Beispiel durch die Vorgabe von Satzanfängen unterstützt werden. Obgleich das Anschreiben der Ergebnisse immer auch die Gefahr birgt, dass Kinder der Meinung sind, ihre Formulierung wäre falsch, auch wenn sie inhaltlich das Gleiche widerspiegelt, und nur die Formulierung an der Tafel sei richtig. Auf diesen verbreiteten Irrtum sollte daher hingewiesen werden.

Durch das Zusammentragen der individuellen Vorgehensweisen können diese möglichst allen Kindern zugänglich gemacht werden. Es erfolgt die quantitative als auch qualitative Erweiterung der mathematischen Sache. Während der Phase der Vertiefung kann auf die Tafelanschrift zurückgegriffen werden und es können, zumindest durch sehr zügig arbeitende Kinder, die individuellen Berechnungswege des kleinen Zahlenfeldes auf das große übertragen werden.

Vertiefung

Die Vertiefung des Sachverhalts soll durch die Erweiterung des Zahlenfeldes geschehen. Da für spätere Gespräche eine gemeinsame Basis wichtig ist, wird hierzu eine Vorlage ausgeteilt, welche den Ausgangspunkt bildet.

Das Erkennen der erweiterten Struktur und die Fortsetzung dieser müssen die Schüler jedoch eigenständig leisten. Es wäre denkbar, dass die Erweiterung als offene Kreativaufgabe gestellt werden würde. Infolge dessen müsste die Weiterarbeit anders gestaltet werden, da eventuell nicht alle Schüler das gleiche Zahlenfeld für die Fortführung nutzen.

Durch die Erweiterung hat das Zahlenfeld jetzt 100 Felder und deckt den Zahlenraum bis 1000 (Gesamtsumme) ab. Wie in der Sachanalyse beschrieben, können auch hier zunächst Regelhaftigkeiten identifiziert werden. Dabei können einige der Strukturen übertragen und bestätigt, aber auch neue gefunden werden. Diese Arbeit soll angerissen und je nach verbleibender Zeit bis zur erneuten Berechnung der Zahlenfeld-Summe vertieft werden.
Es ist jedoch nicht davon auszugehen, dass dies im Rahmen der vorliegenden Stunde in vollem Maße gelingt. Daher wird die Weiterarbeit mit dem erweiterten Zahlenfeld für weitere Mathematikstunden geplant.

Abschluss

Da die neu gewonnen Erkenntnisse in dieser Stunde hinter dem Übungseffekt zurücktreten, wird zum Abschluss nicht die sonst übliche Frage „Was hast du heute gelernt?“ gestellt. Vielmehr wird auf den Sinn von Knobeleien eingegangen. Mit der Frage „Warum knobeln wir denn im Unterricht immer wieder oder erforschen bestimmte Dinge, so wie heute?“ soll den Kindern bewusst gemacht werden, dass nicht nur der im Vordergrund stehende Spaß an der Sache wichtig ist, sondern dass solche Stunden und Übungsformate einen tieferen Sinn haben.

8 Erfolgskriterien und Indikatoren

Kompetenzen/Kriterien	Indikatoren	Methode
Die SuS erweitern ihre Fähigkeit zum problem-lösenden Denken		
Anwendung mathema-tischer Kenntnisse und Fertigkeiten	Alle SuS[19] wenden mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben an.	Forscherheft Prozess-beobachtung Beobach-tungsbogen
Erfassung mathematischer Fragestellungen und Zusammenhänge und Formulierung dieser in eigenen Worten	Über 80% der SuS erfassen mögliche mathematische Fragestellungen und Zusammenhänge und können diese in eigenen Worten formulieren.	
Problemlösungsstrategien entwickeln	Ca. 70 % der SuS finden verstärkt Problemlösestrategien und entwickeln Lösungen und setzen diese um. (Entdecken Gesetz- und Regelmäßigkeiten, Erschließen von Zusammenhängen und wenden diese in der Lösungsfindung an)	
Reflektion über Ergebnisse und Lösungen	Die Mehrheit der SuS reflektieren gemeinsam über Ergebnisse und Lösungswege.	
Die SuS erweitern ihre Kompetenz zum Kommunizieren		
Vorgehensweisen beschreiben	Über 90 % SuS können ihre eigene Vorgehensweise beschreiben.	Forscherheft Prozess-beobachtung Beobach-tungsbogen
Lösungswege gemeinsam reflektieren	Die SuS verbalisieren in der Rechen-konferenz ihre Entdeckungen und überprüfen ihre Arbeitsergebnisse.	
Erweiterung des mathe-matischen Wortschatzes	SuS verwenden selbständig mathematische Zeichen und Fachbegriffe.	
Die SuS erweitern ihre Kompetenz zum Argumentieren		
Vermutungen über mathematische Zusammen-hänge äußern	Die SuS äußern Vermutungen über mathematische Zusammenhänge.	Forscherheft Prozess-beobachtung Beobach-tungsbogen
Begründungen formulieren	Ca. 80 % der SuS formulieren nachvollziehbare Begründungen unter Nutzung von mathematischen Fachbegriffen.	
Lösungswege vergleichen und bewerten	Fast alle SuS beschreiben, vergleichen und bewerten unterschiedliche Lösungswege ganz oder in Ansätzen.	

[19] SuS bedeutet Schülerinnen und Schüler.

Kriterien	Indikatoren	Methode
SuS erleben durch die Lernumgebungen einen anderen Zugang zur Mathematik	Mit Hilfe eines Vorher-Nachher-Vergleichs ist ein Anstieg in dem Bereich der Lernmotivation erkennbar. („Ich mag das Fach Mathematik“ „Ich habe Spaß an Knobelaufgaben“ „Ich arbeite gern mit einem Partner zusammen“)	2 Fragebögen (vorher, nachher)

Als Grundlage für die Erstellung der Erfolgskriterien sowie der Indikatoren dienten die Bildungsstandards für das Fach Mathematik, die am Ende der Jahrgangsstufe vier erreicht werden sollen.

9 Evaluationsmethoden und Datenerhebung

Um zunächst die Ausgangslage der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der beschriebenen Teilkompetenzen zu erfassen, wurde die Methode der systematischen Beobachtung angewandt.

Für die Erhebung des Kompetenzzuwachses der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf die Erfolgskriterien wurden in allen Unterrichtseinheiten genaue Prozessbeobachtungen sowie die Beurteilung der bearbeiteten Unterrichtsmaterialien zur Auswertung herangezogen.

Zusätzlich diente ein Fragebogen (vorher, nachher) zur weiteren Datenerhebung.

10 Auswertung und Darstellung der Ergebnisse

Im ersten Schritt wird die exemplarisch detailliert beschriebene Stunde zum Thema Zahlenfeld analysiert. Danach erfolgt eine allgemeine Auswertung über alle Lerneinheiten des Unterrichtsprojektes.

Auswertung der Stunde „Wir erforschen das Zahlenfeld“

Alle Schülerinnen und Schüler hatten das korrekte Ergebnis ermittelt. Allerdings waren bei einzelnen Hinweise durch die Lehrkraft notwendig, da sie sich bei der Summenbildung verrechneten.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Bearbeitung des kleinen Zahlenfeldes zusammengefasst dargestellt.

- Die einfachste Form, die fortlaufende Addition der Zahlen wurde nur von einer Schülerin gewählt.
- Bei der geschickten Gruppierung der Zahlen ergaben sich qualitative Unterschiede:
    - Zwei Kinder addierten die Zahlen in unterschiedlichen Diagonalen ohne einen Rechenvorteil zu erkennen. Sie bildeten Zwischenergebnisse, welche sie dann schriftlich aufsummierten.
    - Die spaltenweise Addition der einzelnen Zahlen, ohne einen Rechenvorteil zu nutzen, wählte ein Schüler.
    - Eine Schülerin addierte die Zahlen spaltenweise und zeilenweise ohne einen Rechenvorteil zu erkennen.
    - Drei Kinder addierten die Spalten und erkannten dabei, dass der Wert um 5 anwächst.
    - Drei Kinder erkannten, dass die Summen in den Diagonalen jeweils um den Wert 5 anwuchsen. Sie nutzten diesen Rechenvorteil für die Summenbildung. Zwei Schüler davon unterstützten ihren Rechenweg durch farbige Markierungen.
    - Eine andere Möglichkeit ist das Errechnen der Zeilensummen, die sich dann wiederrum leicht zu Summen zusammenfassen lassen (1+4+9+ …). Diese Methode wendeten zwei Kinder an.
    - Ein Kind summierte die Zeilen und nutzte dabei die Multiplikation.
        - (2 x 2, 3 x 3, …6 x 4….)
    - Ein geschicktes Verfahren zur Berechnung der Summe ist das Bilden von Pärchen, die jeweils 10 ergeben (1+9, 2+8 usw.) Diese Variante der Berechnung präsentierten drei Kinder.
    - Zwei Kinder fanden alle 3 Möglichkeiten zur Berechnung der Summe heraus (spaltenweise, zeilenweise und diagonal)

- Bezüglich der Kompetenzbereiche Kommunizieren und Argumentieren lässt sich folgendes feststellen:
    - Der Großteil der Schülerinnen und Schüler konnte seine Entdeckungen über den Aufbau des Zahlenfeldes beschreiben. Die eigene Vorgehensweise sollte auch textlich dokumentiert werden. Der erläuternde Text war bei einigen ungenau und qualitativ sehr unterschiedlich.
    - Alle Schülerinnen und Schüler tauschten sich während der Rechenkonferenz (DU-Phase) mit ihrem Partner aus und konnten ihren Lösungsweg beschreiben. Der Austausch über die Lösungswege regte die Schüler zum Mitdenken an.
    - Die Schülerinnen und Schüler verbalisierten in der Rechenkonferenz ihre Entdeckungen. Dabei stellte mindestens 1 Kind pro Gruppe ihr Gruppenergebnis an der Tafel vor. Durch die wiederholte Erklärung von bereits Entdecktem kam es darüber hinaus auch zu einer qualitativen Vertiefung. Mathematische Fachbegriffe wurden dabei verstärkt verwendet.
    - Die Arbeit an einer gemeinsamen Aufgabe führte in den Du-Wir-Phasen zum Hinterfragen und Prüfen der mathematischen Sachverhalte. Es wurden Vergleiche angestellt, Begründungen eingefordert und unterschiedliche Lösungswege bewertet. Hier waren besonders die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler aktiv. Aber auch die Schwächeren nahmen am Austausch rege teil, wenn auch die Beiträge entsprechend dem Potential der Kinder vielschichtig waren.

<u>Fazit</u>:

Nur eine Schülerin errechnete die Summe „ungeschickt“. Alle anderen Schülerinnen und Schüler haben die Aufgabe mit dem Schwerpunkt „geschicktes Rechnen“ zielgerichtet bearbeitet. Sie fanden Problemlösungsstrategien und entwickelten Lösungen indem sie Gesetz- und Regelmäßigkeiten entdeckten.

Ein schwieriger Punkt war die Fixierung von Entdeckungen. Viele Kinder entdeckten Auffälligkeiten, erkannten die dahinter stehende Struktur und schafften es, das Erkannte zu verbalisieren. Diese Entdeckung aber vorteilhaft für ihren individuellen Rechenweg zu nutzen fiel Einigen noch schwer.

Dieses Erschließen von Zusammenhängen nutzten für die Ermittlung ihrer Ergebnisse ca. 70 % der Schülerinnen und Schüler. Ca. 25 % waren dabei in der Lage, ein geschicktes Verfahren anzuwenden bzw. mehrere Lösungswege zu finden und zu berechnen.

Es gab dabei unterschiedlich anspruchsvolle Lösungswege. Die Art der Darstellung variierte ebenfalls sehr stark. Festzustellen war die hohe Motivation, mit der die Klasse das erweiterte Zahlenfeld in der darauffolgenden Unterrichtsstunde bearbeitete. Dabei verknüpften die Schülerinnen und Schüler die Erkenntnisse aus der Berechnung des kleinen Zahlenfeldes mit der neuen Aufgabe.

<u>Allgemeine Auswertung über alle Lerneinheiten</u>

Die Tabellen, welche die Leistungsübersicht pro Kompetenz der Schülerinnen und Schüler nach der Durchführung des Unterrichtsprojektes zeigen, sind im Anhang auf den Seiten 45 bis 47 zu sehen.

Die Prozessbeobachtungen, die Auswertung der Forscherhefte sowie die Beobachtungsbögen zeigen die folgenden Ergebnisse.

<u>Problemlösen:</u>

- Alle Schülerinnen und Schüler wendeten mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten bei der Bearbeitung der Forscheraufgaben an.
- Zwei Schüler zeigten bei allen bearbeiteten Lernumgebung Schwierigkeiten in der Erfassung der Fragestellung und benötigten die Unterstützung der Lehrkraft. Zudem waren die betreffenden Kinder nicht in der Lage, die Problemstellung in eigenen Worten wiederzugeben. Somit erreichten knapp 90 % der Klasse das Ziel, bei einem gestellten mathematischen Problem eine mathematische Fragestellung zu erfassen und diese mit eigenen Worten zu formulieren.
- Lediglich bei fünf bis sechs Schülerinnen und Schülern war das selbständige Entwickeln von Lösungsstrategien nur in Ansätzen vorhanden. Diesen Kindern fiel es nach wie vor schwer, Zusammenhänge zu erkennen und diese auf die Lösungsfindung zu übertragen.
  Somit kann festgehalten werden, dass ca. 70 % der Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Problemlösestrategien zu entwickeln und diese umzusetzen.
- Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler war in der Lage, in der Rechenkonferenz über ihre Ergebnisse und ihre Lösungswege zu reflektieren.

Eine Steigerung der Kompetenz Problemlösen ist in allen Bereichen festzustellen.

Alle untersuchten Indikatoren sind damit erfüllt worden.

<u>Kommunizieren:</u>

- Nach der Durchführung des Projektes waren 18 von 19 Schülerinnen und Schülern in der Lage, ihre Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgaben zu beschreiben.

- Die Schülerinnen und Schüler zeigten eine deutliche Steigerung in der Verbalisierung ihrer Entdeckungen in der Rechenkonferenz und konnten dadurch die eigenen Arbeitsergebnisse gut überprüfen.
- Dabei wurde ein Schwerpunkt auf die Verwendung von mathematischen Fachbegriffen und Zeichen gelegt. Die Schülerinnen und Schüler verwendeten im Laufe der Rechenkonferenzen zunehmend sicherer die mathematischen Fachbegriffe.

Auch die Kompetenz Kommunizieren wurde erfolgreich gefördert, denn die Schülerinnen und Schüler zeigten eine Verbesserung in allen Bereichen.

In besonderem Maße konnte eine Verbesserung in den Bereichen *…kann Vorgehensweisen beschreiben* sowie *…kann eingeführte mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden* festgestellt werden.

Argumentieren:

- Alle Schülerinnen und Schüler äußerten Vermutungen über mathematische Zusammenhänge, jedoch auf einem qualitativ sehr unterschiedlichen Niveau.
- Fast alle Kinder der Klasse konnten am Ende auf Nachfrage hin Begründungen formulieren.
- Das Vergleichen und Bewerten von den verschiedenen Lösungswegen gelang 13 Schülerinnen und Schülern. Bei vier Kindern gelang diese Teilkompetenz nur in Ansätzen.

Hinsichtlich der Kompetenz Argumentieren ließ sich bei etwa 90 % der Kinder eine Verbesserung feststellen. Allerdings ist bei dieser Kompetenz der qualitative Unterschied am größten. Den größten Kompetenzzuwachs lässt sich im Bereich *…kann Begründungen formulieren* festhalten. Trotz des unterschiedlichen Niveaus in der Ausführung, was ja im Wesen der Lernumgebungen steckt, gelten die Indikatoren als erfüllt.

Anderen Zugang zur Mathematik:

Die Ergebnisse beruhen auf Fragebogendaten von 19 Schülerinnen und Schülern. Der Fragebogen und die grafische Darstellung der Antworten sind im Anhang auf den Seiten 52 bis 54 dargestellt.

In der Einschätzung der Kinder, ob sie das Fach Mathematik mögen, ist eine leichte Zunahme der positiven Antworten von 16 auf 18 zu verzeichnen.

Eine deutlich positive Veränderung ist bei der Frage zu erkennen, ob die Kinder Spaß an Knobelaufgaben haben. An dieser Stelle konnte für die

Antwortmöglichkeit *ja* (trifft voll und ganz zu) eine Steigerung von 26 % auf 60 % der Klasse festgehalten werden.

Besonders positiv zu bewerten ist die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler sich nun auch mehr an unbekannte sowie herausfordernde Problemstellungen trauen. Fast 90 % der Klasse bewerten dieses Item positiv. Vor der Durchführung des Projektes waren es nur 53 %. Die Selbstwirksamkeit der Schülerinnen und Schüler konnte damit erhöht werden.

Einen geringeren Einfluss hatte der Einsatz der Lernumgebungen auf die Bewertung der Partner- / Gruppenarbeit. 12 Kinder gaben bereits im Pretest an, gern mit einem Partner oder in der Gruppe zu arbeiten. Bei der abschließenden Befragung waren 16 Kinder dieser Meinung. Das bedeutet eine leichte Zunahme um 21 %.

Eine Verbesserung zeigte sich auch in der Beurteilung der Kinder, dass sie ihre Ergebnisse gern vor der gesamten Klasse präsentieren. Während in der Vorerhebung 7 Kinder dieses Item mit e*her ja* oder *ja* beantworteten, waren es in der Nacherhebung bereits 14 Schülerinnen und Schüler.

Das sechste Item bezog sich auf die Verwendung von mathematischen Fachwörtern im Unterricht. Vom ersten zum zweiten Messzeitpunkt nehmen ca. 37 % der Schüler eine Verbesserung im Gebrauch der Fachbegriffe wahr.

Fazit:

Die Ergebnisse waren vielschichtig und in hohem Maße individuell. Sie variierten in ihrem Komplexitätsgrad ebenso wie in ihrem Anspruchsniveau, je nach Potential der Kinder.

Bei lernschwächeren Kindern zeigten sich die Lernfortschritte in dem zunehmend systematischen Herangehen an die Aufgabe. Leistungsstärkere Schüler verbesserten sich vor allem im Bereich der Verbalisierung und mathematischen Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit.

Entscheidend ist aber die Tatsache, dass bei allen Kindern ein Lernzuwachs erzeugt wurde. Alle Kinder hatten im Ergebnis ein vorzeigbares Resultat und waren voller Begeisterung bei der Sache.

11 Interpretation der Daten

Ein Unterricht mit Lernumgebungen fördert das gesamte Begabungsspektrum und unterstützt die Entwicklung der Kompetenzen aller Schülerinnen und Schüler.
Im Gegensatz zu traditionellen Aufgaben ist eine Lernumgebung so angelegt, dass sie eine längere und vertiefende Beschäftigung vorsieht, keine Rechenwege vorgibt und viele Spielräume für die Gestaltung des Lösungsweges lässt.
Diese fördern die individuellen Denk- und Lernwege mit eigenen Darstellungsformen. Dabei werden mathematische Tätigkeiten auf elementarer Ebene ebenso ermöglicht, wie eine anspruchsvolle Herangehensweise an die Lösungsfindung für schnell Lernende.
Die Ergebnisse, die Lernumgebungen im Mathematikunterricht erbringen, sind im Grunde übergeordnete, sowie längerfristige Ergebnisse. Dazu gehört die Stärkung der Freude am Mathematisieren und im Zusammenhang damit die Weiterentwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken und zum Erkennen von mathematischen Auffälligkeiten. Zudem wird die Verbalisierung der gewonnenen Erkenntnisse fortwährend ausgebaut und somit der mathematische Wortschatz erweitert und die Sprachkompetenz der Kinder erhöht.
Darüber hinaus wird die Fähigkeit, solche Aufgaben möglichst zügig und sicher lösen zu können, gesteigert. Die additiven Rechenvorgänge, wie die Aufgaben des kleinen Einmaleins, trainieren das Basiswissen.
Die Kinder merken darüber hinaus dass Mathematik mehr als nur Rechnen ist und sogar Spaß machen kann. Dies ist vor allem für die schwächeren Schüler, die im alltäglichen Unterricht oftmals weniger Erfolgserlebnisse verbuchen können, besonders von Bedeutung. Es wird die Entwicklung einer positiven Einstellung zur Mathematik gefördert.
Die Leistungen aller Kinder werden positiv bewertet. Dies wird als „Anerkennungskultur“ bezeichnet. „Wesentliches Element in einem von Anerkennungskultur bestimmten Klassenklima ist die positiv wertende und kompetenzorientierte Sicht auf die Beiträge der Kinder im Gegensatz zu einer defizitorientierten Sicht, die vorrangig betont, was an dem Beitrag eines Kindes zur Vollständigkeit oder zur Richtigkeit noch fehlt.“[20]

[20] Hirt / Wälti, 2014, S. 13.

Die Arbeit jedes Einzelnen wird in die Arbeit einer Lerngruppe aufgenommen (Ich-Du-Wir Prinzip). Die Schüler tauschen sich zunächst fachlich mit ihren Banknachbarn aus, bevor sie in eine weitere Phase, der konstruktiven Lösungsfindung in der Gruppe, treten. Dieses Übungsformat erweitert die soziale Kompetenz der Schüler und zeigt sich z.B. in höherer Hilfsbereitschaft untereinander und im gesamten Umgang der Schüler miteinander.
Infolge wird das Unterrichtsklima ausgleichender und motivierender. Das gemeinsame „Mathematisieren" unterstützt das von- und miteinander Lernen sowie die Akzeptanz von unterschiedlichen Herangehensweisen.
Die Förderung des problemlösenden Denkens führt auf längere Sicht dazu, dass Schülerinnen und Schüler unbefangener und optimistischer an Problemstellungen herangehen. Mit zunehmender Sicherheit gewinnen die Kinder Selbstvertrauen und nehmen sich als selbstwirksam war. Dies steigert bei ihnen die intrinsische Motivation, mathematische Problemstellungen zu lösen.
Letztlich erfordert die Arbeit an oder mit einem Problem auch ein gewisses Durchhaltevermögen und Ehrgeiz. Diese Eigenschaften werden die Kinder im schulischen Rahmen stetig weiterentwickeln und ausbauen und im späteren Leben dann auch auf alltägliche Situationen übertragen.

12 Konsequenzen

Die Ergebnisse zeigen, dass Lernumgebungen eine Bereicherung für den Unterricht darstellen und infolge dessen sollten diese einen festen Bestandteil im Mathematikunterricht einnehmen.
Der Einsatz von Lernumgebungen ist in allen mathematischen Bereichen möglich. Beispiele sind in der Arithmetik Rechenmauern, in der Geometrie Geobretter und im Sachrechnen „Kopf-Fuß-Probleme". Dabei können die Aufgabenformate je nach Bedarf in Einführungsstunden, Übungsstunden oder im Förderunterricht platziert werden.
Die Rechenkonferenz als wichtiges Instrument sollte für einen reibungslosen Ablauf einstudiert werden. Eine Kommunikationskultur muss etabliert werden. Dies geschieht durch das Vorgeben von geeigneten Satzanfängen als Hilfestellung sowie die stetige Verwendung von Fachbegriffen.

Als bekannte Konstante kann ein Knobel- oder Forscherheft eingesetzt werden. Hier tragen die Kinder ohne konkrete Vorgaben oder irgendwelche Einschränkungen ihre Entdeckungen ein.
Hervorzuheben ist auch, dass Lernumgebungen in alle Klassenstufen eingesetzt werden können. Die Übungsformate können strukturiert und fachlich korrekt unter Einhaltung der grundlegenden Gütemerkmale des Mathematikunterrichtes angepasst werden. Sinnvoll ist es, die Schülerinnen und Schüler ab der ersten Klasse an solche Aufgaben zu gewöhnen.
Lernumgebungen sind nicht auf den Mathematikunterricht beschränkt, sondern bieten vielfältige Einsatzmöglichkeiten in vielen Fächern. Grundbedingung sind substanzielle Aufgaben, mit denen die Kinder sich eigenständig auseinandersetzen und verschiedene Typen eines fachbezogenen Arbeitens verwenden können.
Allerdings garantieren Lernumgebungen allein noch keinen kompetenzorientierten und differenzierten Unterricht. Wichtig sind auch der sachgerechte Umgang mit ihnen und die damit veränderte Lehrerrolle. Die Lehrkraft ist nicht mehr allein Wissensvermittler wie in einem lehrerzentrierten Unterricht, sondern nimmt die Rolle der Beraterin und Organisatorin ein. Hierzu ist ein tiefes Verständnis des zentralen mathematischen Inhalts der Lernumgebung eine wichtige Voraussetzung. Dazu ist es förderlich, dass die Lehrkraft die Aufgabe selbst erprobt hat, z. B. in der Fachkonferenz, um zu wissen, was in ihr steckt.
Das Arbeiten mit Lernumgebungen erfordert Zeit und Geduld. Das Ziel darf es nicht sein, rasch vorwärtszukommen, sondern dass alle Kinder beispielsweise ihre eigene Einsicht in mathematische Strukturen gewinnen können. Dabei zeigt sich das unterschiedliche Lern- und Arbeitstempo der Schülerinnen und Schüler in seiner ganzen Palette. Die Lehrkraft muss Teillösungen der Kinder oder erst in Ansätzen entwickelte Strategien erkennen, positiv werten und in die weiterführende Arbeit mit aufnehmen.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

- Blücherschule Wiesbaden (2014): Schulprogramm der Blücherschule – Europaschule Ganztagsgrundschule. Wiesbaden.

- Gesellschaft für europäische Bildungsprojekte e.V. (2010): Europäisches Curriculum der Hessischen Europaschulen. Kompetenzorientiertes Curriculum für die Europäische Dimension und das Interkulturelle Lernen. Weilburg.

- Hessisches Kultusministerium (Hrsg.) (2011): Bildungsstandards und Inhaltsfelder – Das neue Kerncurriculum für Hessen. abrufbar unter: https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kc_mathematik_prst_2011.pdf (Stand: 27.05.2016)

- Hessisches Kultusministerium Institut für Qualitätsentwicklung (2011): Referenzrahmen Schulqualität in Hessen. 2. Aufl. Wiesbaden.

- Hirt, U. / Wälti, B. (2014): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. 4. Aufl. Seelze: Friedrich Verlag GmbH.

- Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik – IPN (Hrsg.) (2011): SINUS an Grundschulen. Informationen der Koordinierungsstelle „SINUS an Grundschulen“. Nr. 5. Kiel.

- Maras, R. / Ametsbichler, J. / Eckert-Kalthoff, B. (2008): Handbuch für die Unterrichtsgestaltung in der Grundschule. Planungshilfe. Strukturmodelle. didaktische und methodische Grundlagen. Donauwörth.

- Peter-Koop, A. / Lilitakis, G. / Spindeler B. (Hrsg.) (2009): Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag GmbH.

- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004
  abrufbar unter:
  http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Stand: 27.05.2016)

- Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung/ Berlin (Hrsg.) (2009): Bildung für Berlin. Individuelle Stärken herausfordern. 11 Lernumgebungen für einen differenzierenden kompetenzorientierten Mathematikunterricht von der Schulanfangsphase bis zu 6. Klasse. Berlin.
  abrufbar unter:
  http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/material/Individuelle_Staerken_herausfordern.pdf (Stand: 24.05.2016)

Anhang

Lernausgangslage

Problemlösen

	Kompetenz Problemlösen			
Schüler	kann in Problemsituationen mögliche mathematische Fragestellungen und Zusammenhänge erfassen und diese in eigenen Worten formulieren	kann Lösungsstrategien entwickeln und setzt diese um	kann Ergebnisse reflektieren	kann Lösungswege reflektieren
S1	-	0	-	-
S2	0	0	+	0
S3	+	+	+	0
S4	+	++	+	+
S5	-	0	-	-
S6	+	0/+	+	0/+
S7	+	+	+	+
S8	0	+	0	0
S9	+	+	0/+	0/+
S10	0	+	0	0
S11	-	-/0	-	-
S12	+	+	0/+	0/+
S13	+	0/+	+	+
S14	-	-	-	-
S15	+	++	+	++
S16	+	0/+	+	+
S17	0	0/+	0/+	0/+
S18	0	-/0	0	0
S19	0	+	+	+

Zeichenerklärung:
+ + = voll ausgeprägt,
\+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
\- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Kommunizieren

	Kompetenz Kommunizieren		
Schüler	kann Vorgehensweisen beschreiben	kann Lösungswege gemeinsam reflektieren	kann eingeführte mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
S1	0	0	-
S2	0	0	0
S3	+	+	0/+
S4	+	+	+
S5	0	-	0
S6	+	+	0/+
S7	++	+	+
S8	+	0/+	+
S9	+	+	0/+
S10	+	0	+
S11	-	-	-
S12	+	+	+
S13	+	0/+	0/+
S14	0	-	-
S15	++	+	+
S16	+	+	+
S17	+	0/+	0/+
S18	+	0/+	0
S19	+	+	+

Zeichenerklärung:
+ + = voll ausgeprägt,
+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Argumentieren

	Kompetenz Argumentieren		
Schüler	kann Vermutungen über mathematische Zusammenhänge äußern	kann Begründungen formulieren	kann Lösungswege vergleichen und bewerten
S1	0	0	0
S2	+	0	0
S3	+	+	+
S4	+	0/+	0/+
S5	0	-	-
S6	+	0/+	0/+
S7	+	+	+
S8	+	+	+
S9	+	0/+	0/+
S10	+	+	0
S11	-	-	-
S12	+	+	+
S13	+	0/+	0/+
S14	-	-	-
S15	+	++	+
S16	+	+	+
S17	+	0/+	0
S18	0	0	0
S19	+	++	+

Zeichenerklärung:
+ + = voll ausgeprägt,
+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Ergebnisse nach Durchführung der Lernumgebungen

<u>Problemlösen</u>

	Kompetenz Problemlösen			
Schüler	kann in Problemsituationen mögliche mathematische Fragestellungen und Zusammenhänge erfassen und diese in eigenen Worten formulieren	kann Lösungsstrategien entwickeln und setzt diese um	kann Ergebnisse reflektieren	kann Lösungswege reflektieren
S1	0	0	0	0
S2	+	+	+	0
S3	+	+	+	+
S4	+	++	++	+
S5	-/0	0	0	0
S6	+	+	+	+
S7	++	+	++	++
S8	+	+	+	0
S9	+	+	+	0/+
S10	+	+	+	0
S11	0	-/0	-/0	-/0
S12	+	+	+	+
S13	+	+	+	+
S14	-/0	-/0	-/0	-
S15	++	++	++	++
S16	+	0/+	+	+
S17	+	+	+	0/+
S18	+	0/+	0/+	0
S19	+	+	+	+

Zeichenerklärung:
+ + = voll ausgeprägt,
\+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
\- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Blücherschule
Europaschule

Kommunizieren

	Kompetenz Kommunizieren		
Schüler	kann Vorgehensweisen beschreiben	kann Lösungswege gemeinsam reflektieren	kann eingeführte mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
S1	+	+	0
S2	+	0/+	+
S3	++	+	+
S4	+	+	++
S5	+	0	0/+
S6	+	+	+
S7	++	++	+
S8	+	+	+
S9	+	+	+
S10	+	+	+
S11	0	-	0
S12	+	+	+
S13	+	+	0/+
S14	+	0	0
S15	++	++	++
S16	+	+	+
S17	+	0/+	+
S18	+	+	0
S19	++	+	++

Zeichenerklärung:
+ + = voll ausgeprägt,
+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Argumentieren

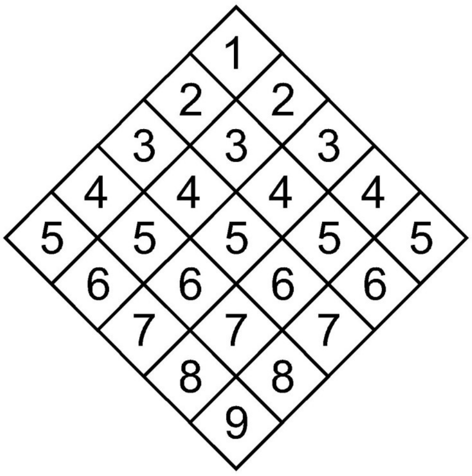
	Kompetenz Argumentieren		
Schüler	kann Vermutungen über mathematische Zusammenhänge äußern	kann Begründungen formulieren	kann Lösungswege vergleichen und bewerten
S1	+	+	0
S2	+	+	+
S3	+	++	+
S4	+	+	+
S5	+	0	0
S6	+	+	+
S7	++	++	+
S8	+	++	+
S9	+	+	0/+
S10	+	+	+
S11	0	0	-
S12	+	++	+
S13	+	+	+
S14	0	0	-
S15	++	++	++
S16	+	++	+
S17	++	+	+
S18	+	0/+	0
S19	++	++	+

Zeichenerklärung:
\+ + = voll ausgeprägt,
\+ = ausgeprägt,
0 = in Ansätzen vorhanden,
\- = kaum ausgeprägt / = nicht feststellbar

Dokumente aus dem Thema „Zahlenfeld“

- **BINGO-Feld für Kopfrechenphase**

- **Zahlenfeld zur freien Exploration**



- **Forscherauftrag zur Hauptübungsphase**

Erkunde und Erforsche das Zahlenfeld.

<u>Finde schlaue Wege,</u>

<u>um alle Zahlen zu addieren.</u>

Blücherschule
Europaschule

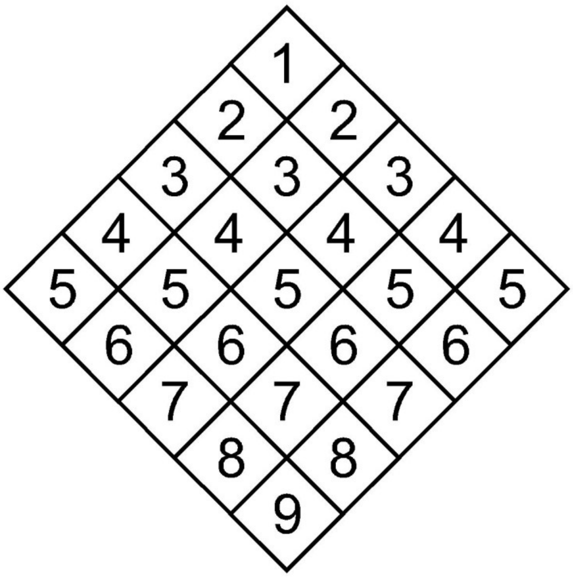
❖ **Differenzierungsaufgabe 1**

Erkläre was du heraus gefunden hast.

Begründe warum dein Rechenweg schlau ist.

❖ **Differenzierungsaufgabe 2**

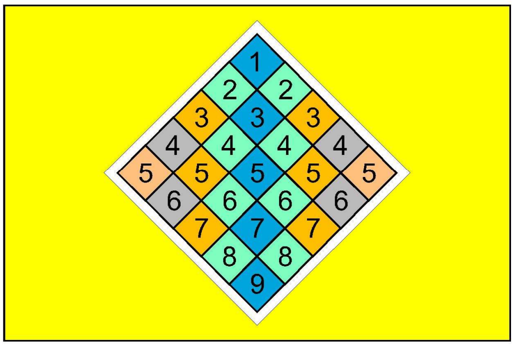
Findest du noch einen anderen Weg
die Summe des Zahlenfeldes geschickt zu berechnen?

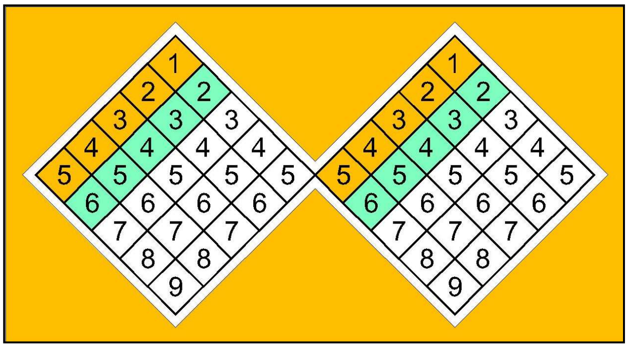


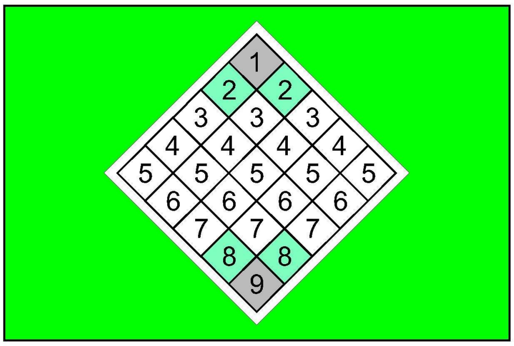
Du hast keine Idee, obwohl du deinen Kopf schon angestrengt hast?
Dann darfst du dir eine der Tippkarten vorne anschauen.

Blücherschule
Europaschule

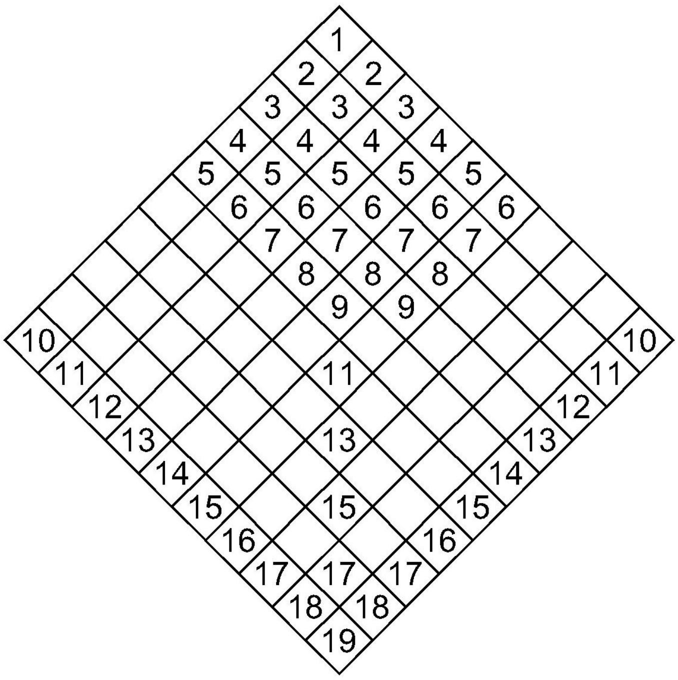
❖ Tippkarten zur Differenzierungsaufgabe 2



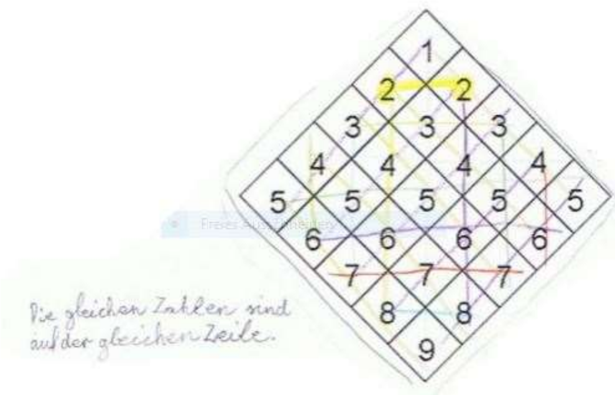


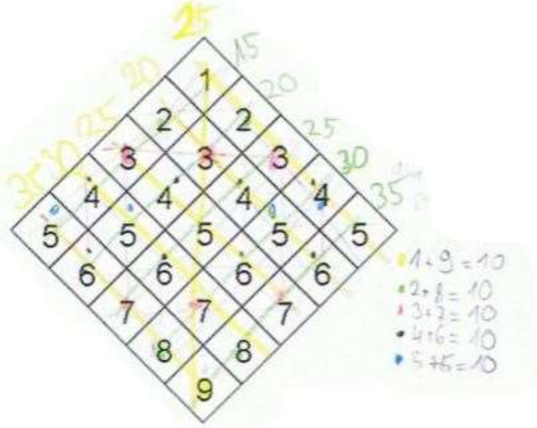


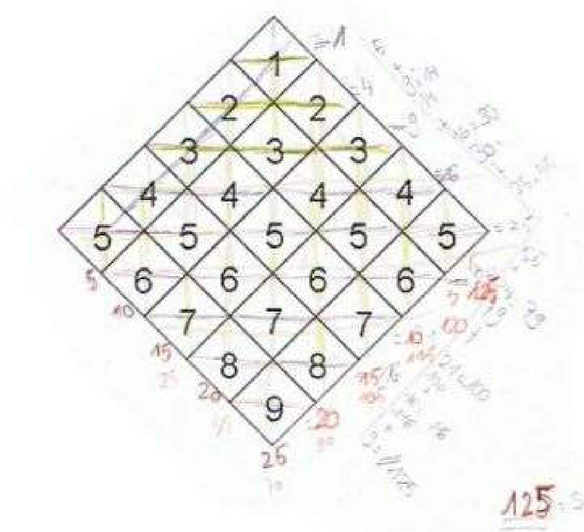
❖ Vorlage zur Vertiefung

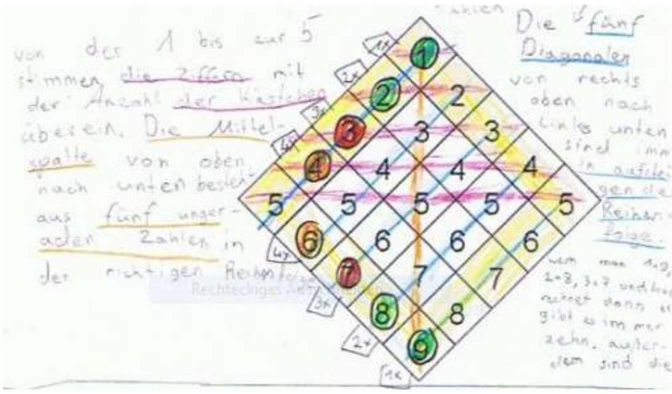


Schülerdokumente aus der Erforschung Zahlenfeld









Mir ist aufgefallen das die Zahlen in der Zeile immer gleich sind. Die Zahlen haben ein spizeiles Muster. Wenn man die Zahlen von oben über die Ecken unten rechnet hat man die Zahlen rein folge von 1-9. Ich habe erst mal mal gerechnet und dan Plus. Ich habe zeilen weise gerechnet

Schülerfragebogen

Deine Meinung ist gefragt:

1. Ich mag das Fach Mathematik.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

2. Ich habe Spaß an Knobelaufgaben.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

3. Ich traue mich auch an schwierige Aufgaben heran, bei denen ich noch keinen Rechenweg weiß.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

4. Ich arbeite im Mathematikunterricht gern mit einem Partner oder in der Gruppe zusammen.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

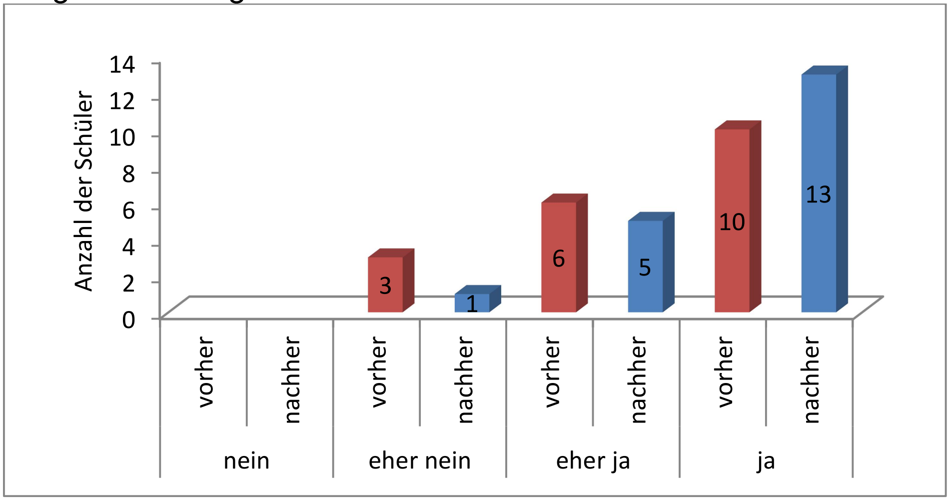
5. Ich erläutere meine Ergebnisse gern vor der Klasse.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

6. Ich verwende im Unterricht die mathematischen Fachwörter.
   - ☐ nein
   - ☐ eher nein
   - ☐ eher ja
   - ☐ ja

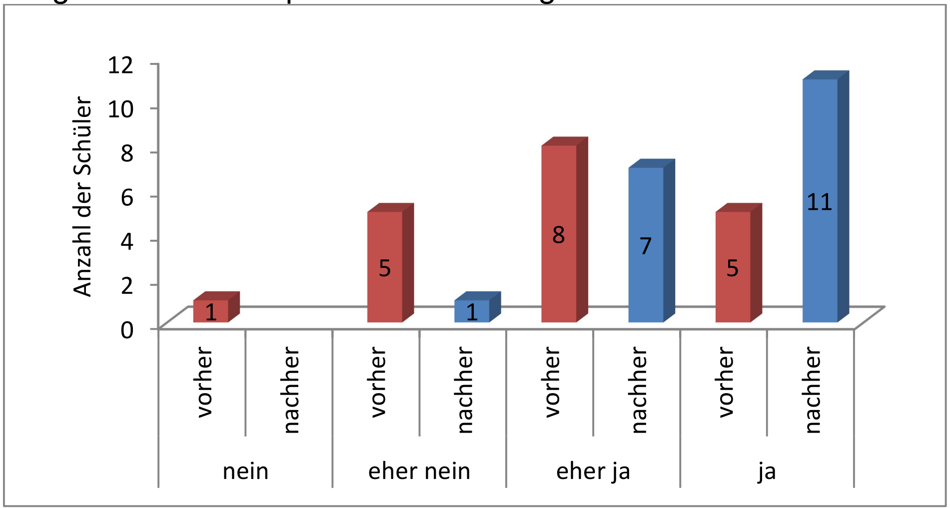
Blücherschule
Europaschule

Auswertung Fragebogen

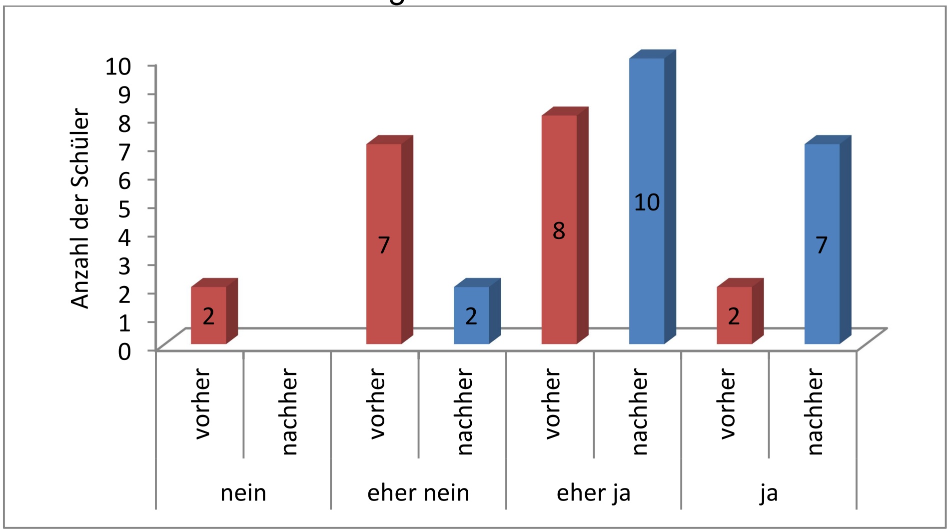
Frage 1: Ich mag das Fach Mathematik.



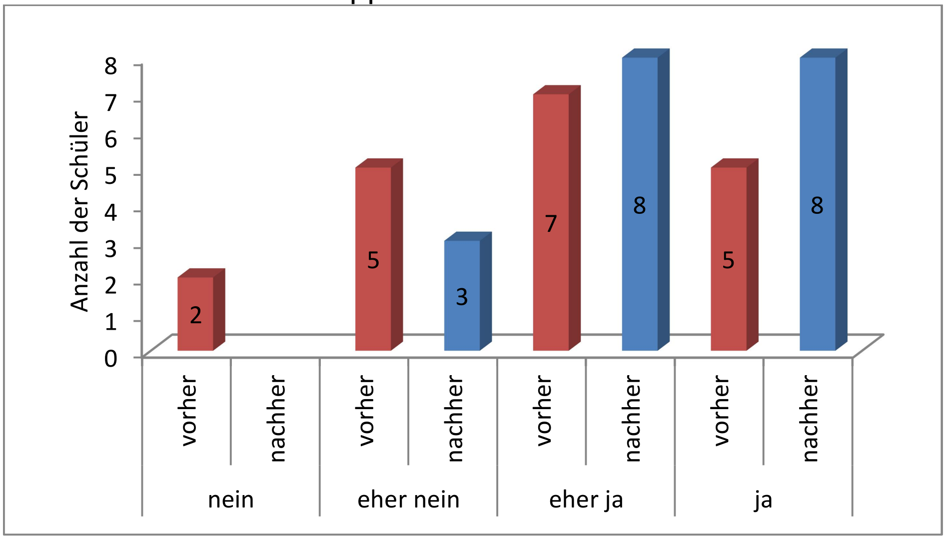
Frage 2: Ich habe Spaß an Knobelaufgaben.



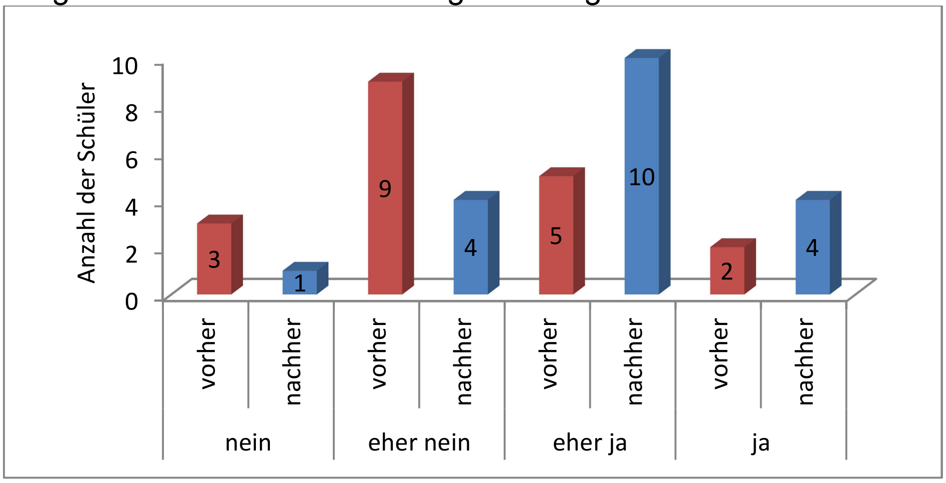
Frage 3: Ich traue mich auch an schwierige Aufgaben heran, bei denen ich noch keinen Rechenweg weiß.



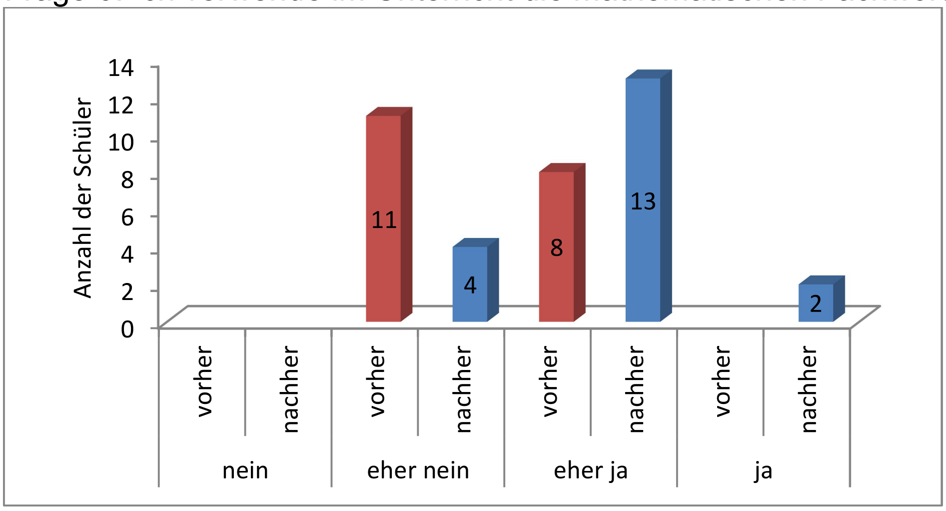
Frage 4: Ich arbeite im Mathematikunterricht gern mit einem Partner oder in der Gruppe zusammen.



Frage 5: Ich erläutere meine Ergebnisse gern vor der Klasse.



Frage 6: Ich verwende im Unterricht die mathematischen Fachwörter.



Kurzübersicht über die im Rahmen des Projektes erprobten weiteren Lernumgebungen im Bereich der Arithmetik.

Strukturierte Päckchen

Thema und Intention

Strukturierte Päckchen sind Ausgangspunkt für mathematische Tätigkeiten, die das Rechnen und Muster erkennen, trainieren. Durch die systematische Veränderung der einzelnen Rechnungen entstehen Strukturen, die erforscht, ausgestaltet, fortgesetzt, abgeändert sowie selber erzeugt werden können.

Worum es geht

Die Kinder beschäftigen sich mit den Zusammenhängen innerhalb eines Päckchens und vertiefen damit ihr Verständnis zu Zahlenräumen und Operationen. Die Päckchen bestehen aus Serien von Aufgaben, deren Zahlen sich in je gleicher Weise verändern, mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Ergebnisse. Wenn man einige Aufgaben bearbeitet und die Regelmäßigkeit in den Ergebnissen wahrgenommen hat, werden die nachfolgenden Ergebnisse vorhersagbar. Demzufolge müssen die weiteren Aufgaben nun nicht mehr einzeln ausgerechnet werden.

Im Folgenden sind die Aufträge zu den strukturierten Päckchen abgebildet:

Strukturierte Päckchen

1. Berechne die Ergebnisse und notiere die weiteren Rechnungen.

0. 200 + 799 = ____	0. 400 − 365 = ____	0. 015 + 105 = ____
1. 201 + 787 = ____	1. 390 − 350 = ____	1. 115 + 115 = ____
2. 202 + 775 = ____	2. 380 − 335 = ____	2. 215 + 125 = ____
3. 203 + 763 = ____	3. 370 − 320 = ____	3. 315 + 135 = ____
4. ___ + ___ = ____	4. ___ − ___ = ____	4. ___ + ___ = ____
5. ___ + ___ = ____	5. ___ − ___ = ____	5. ___ + ___ = ____
6. ___ + ___ = ____	6. ___ − ___ = ____	6. ___ + ___ = ____
...	...	...
10. ___ + ___ = ____	10. ___ − ___ = ____	10. ___ + ___ = ____
20. ___ + ___ = ____	20. ___ − ___ = ____	20. ___ + ___ = ____
100. ___ + ___ = ____	100. ___ − ___ = ____	100. ___ + ___ = ____

2. Wie hast du die 10., 20. und 100. Rechnung gefunden?

3. Erfinde ein solches Päckchen und tausche es mit einer Partnerin oder einem Partner aus.

4. Erfinde ein Päckchen, bei dem die Resultate von Rechnung zu Rechnung um 8 größer werden.

5. Erfinde ein Päckchen mit den Resultaten 70, 160, 250, 340, …

(Quelle: Hirt, U./ Wälti, B. (2014). Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte)

Schülerdokumente aus der Erprobung

Die Schülerin N. erkennt die Struktur der Päckchen und führt diese weiter. Beim ersten Päckchen bestimmt die Schülerin die Summen bei der zehnten und zwanzigsten Rechnung im Kopf, ohne die dazwischenliegenden Teilaufgaben rechnen zu müssen.
Auch beim zweiten Päckchen wurde die zugrunde liegende Struktur erkannt, obwohl die zwanzigste Rechnung einen Fehler enthält („ 65“ statt „70“).

0. 200 + 799 = 999	0. 400 − 365 = 35
1. 201 + 787 = 988	1. 390 − 350 = 40
2. 202 + 775 = 977	2. 380 − 335 = 45
3. 203 + 763 = 966	3. 370 − 320 = 50
4. 204 + 751 = 955	4. 360 − 305 = 55
5. 205 + 739 = 944	5. 350 − 290 = 60
6. 206 + 727 = 933	6. 340 − 275 = 65
…	…
10. 210 + 679 = 889	10. 300 − 215 = 85
20. 220 + 559 = 779	20. 200 − 70 = 130
100. 300 + [illegible] = [illegible]	100. [illegible] − ___ = [illegible]

Der Schüler D. arbeitet mit großem Engagement und bearbeitet alle Aufgaben. Der Schüler erfindet ein Päckchen, bei dem die Summen um 8 größer werden (Nr. 4).
Daneben schreibt das Kind zusätzlich ein Päckchen auf, mit den Resultaten 70, 160, 250, 340, …

Nr 4	Nr 5.
1. 473 + 312 = 785	1. 30 + 40 = 70
2. 478 + 315 = 793	2. 90 + 70 = 160
3. 483 + 318 = 801	3. 150 + 100 = 250
4. 488 + 321 = 809	4. 210 + 130 = 340
5. 493 + 324 = 817	5. 270 + 160 = 430
6. 498 + 327 = 825	6. 330 + 190 = 520
7. 503 + 330 = 833	7. 390 + 220 = 610
8. 508 + 333 = 841	8. 450 + 250 = 700
9. 513 + 336 = 849	9. 510 + 280 = 790
10. 518 + 339 = 857	10. 570 + 310 = 880

Die Schülerin T. entwickelt strukturierte Päckchen für einen Lernpartner. Sie hat die Aufgabe damit erfüllt.

0	200 + 111 = 311
1	189 + 105 = 294
2	178 + 99 = 277
3	167 + 93 = 260
4	156 + 87 = 243
5	145 + 81 = 226
6	134 + 75 = 209
…	
10	___ + ___ =
20	___ + ___ =
100	___ + ___ =

Zusammenfassung:
Die Lösungsvorschläge waren sehr unterschiedlich. Alle Kinder vertieften die Addition und Subtraktion und waren in der Lage, vorgegebene Rechnungen zu lösen. Nur wenige Schüler führten die Päckchen fort, um auf die zehnte bzw. zwanzigste Rechnung zu kommen. Die Kinder mit anspruchsvolleren Lösungen entdeckten und nutzten die Strukturen, um die zehnte und zwanzigste Rechnung im Kopf zu lösen. Zudem konnten sie ihre Vorgehensweise beschreiben und Fragen zu ihrem Lösungsweg beantworten.

Magische Quadrate mit 4 x 4 Zahlen

Thema und Intention

Zahlenquadrate – auch magische Quadrate genannt – sind eine besondere Form von Zahlenmustern. Die Schülerinnen und Schüler sollen Muster und Strukturen erkennen, die dem magischen Quadrat zugrunde liegen. Die Bearbeitung dieser Zauberquadrate eröffnet abwechslungsreiche Möglichkeiten für selbständiges Erforschen und Entdecken. Dabei wird nicht nur das flexible Denken gefördert, sondern auch die Grundoperationen wie Addieren und Dividieren geübt.

Worum es geht

Magische Quadrate sind Zahlenquadrate mit n Zeilen und n Spalten, in denen jede der Zahlen genau einmal vorkommt. Weiterhin sind alle Zeilen- und Spaltensummen sowie beide Diagonalsummen gleich. Daher spricht man von magischen Summen.
Für die erprobte Lernumgebung wurde ein Quadrat mit 4 x 4 Zahlen ausgewählt. Untersucht wurde Quadrate mit 16 aufeinanderfolgenden Zahlen aus beliebigen arithmetischen Reihen, beispielsweise (1, 2, 3, … 16) oder (4, 8, 12, 16, … 64). Bei den untersuchten Quadraten ist die magische Summe jeweils das Doppelte der Summe der kleinsten und der größten Zahl.
Aus einem gegebenen magischen Quadrat lassen sich durch Addition bzw. Multiplikation aller Zahlen mit demselben Summand bzw. Faktor neue magische Quadrate erzeugen. Ebenso können neue Quadrate durch Kongruenzabbildungen oder durch das Übereinanderlegen von zwei magischen Quadraten, indem die übereinanderliegenden Zahlen addiert werden, gebildet werden.

Magische Quadrate mit 4 × 4 Zahlen Datum:

1. a) Das zweite und das dritte Quadrat sind magische Quadrate. Überprüfe dies.
   b) Wie stellt man sie her?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

→

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

→

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2. Überprüfe, ob sich wieder ein magisches Quadrat ergibt, wenn du:
   a) jede Zahl um 1 (um 2) vergrößerst.
   b) jede Zahl verdoppelst.
   c) die entsprechenden Zahlen von zwei magischen Quadraten addierst (subtrahierst).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

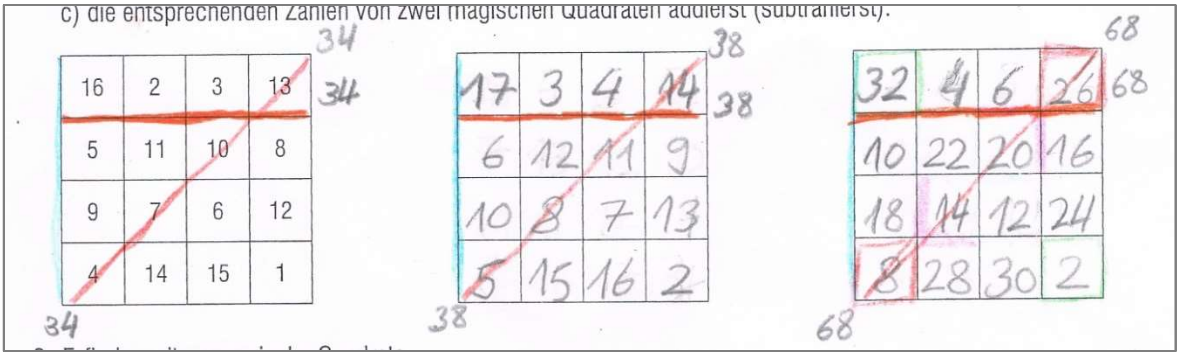
3. Erfinde weitere magische Quadrate.

4. a) Finde ein magisches Quadrat mit der magischen Summe 98 (198/250).
   b) Bilde ein magisches Quadrat mit den Zahlen 25, 30, 35, 40, … 100.

(Quelle: Hirt, U./ Wälti, B. (2014). Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte)

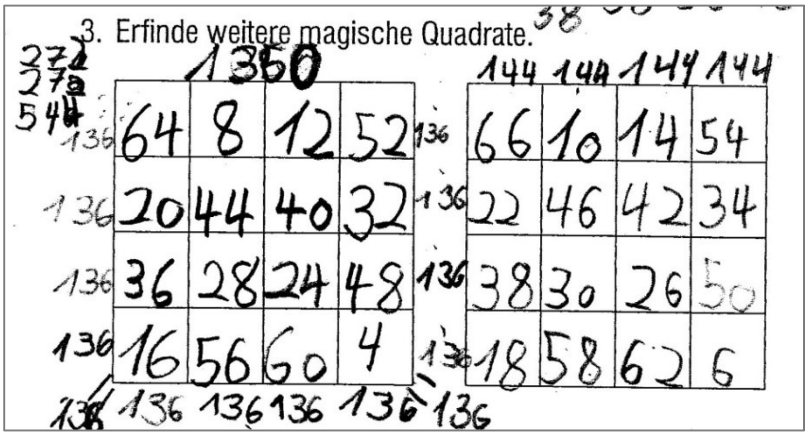
Schülerdokumente aus der Erprobung

Der Schüler J. hat sich mit der Veränderung der magischen Summe beschäftigt. Systematisch erhöht er jede Zahl um eins im zweiten Quadrat. Dabei entsteht die Summe 38. Im dritten Quadrat wird jede Zahl aus dem ersten magischen Quadrat verdoppelt. Damit verdoppelt sich die Summe ebenso. Zur Sicherheit wird in beiden magischen Quadraten die Summe jeweils in der Zeile, in der Spalte sowie in der Diagonalen überprüft und an der Seite notiert.



Ein anderer Schüler findet weitere magische Quadrate, indem er alle Zahlen aus dem letzten magischen Quadrat aus der vorhergehenden Aufgabe verdoppelt.

Bei dem nachfolgenden Quadrat erhöht er die Zahlen jeweils um zwei.



Damit hat er die Struktur eines magischen Quadrats erkannt und angewendet.

Zusammenfassung:

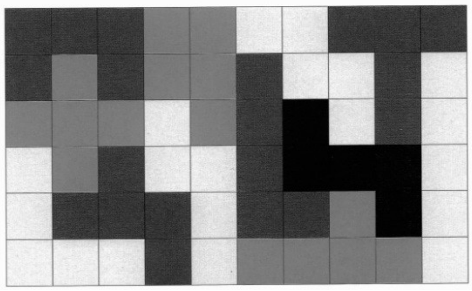
Alle Schüler haben einige Muster entdeckt. Einige Kinder haben eine große Anzahl an magischen Quadraten erfunden. Nur wenige Schüler haben sich auf die Überprüfung der magischen Quadrate in der ersten Aufgabenstellung beschränkt. Einzelne Kinder konnten beliebige magische Quadrate mit beliebigen Summen entwickeln.

Pentominos auf der Hundertertafel

Hundertertafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Pentomino-Schablonen



(Quelle: Hirt, U./ Wälti, B. (2014). Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte)

Thema und Intention

Das Thema Pentominos ist sehr motivierend und enthält viel Potential für mathematisches Denken und Forschen. Die Aufgabenstellungen mit Pentominos ermuntern Schülerinnen und Schüler zum Argumentieren und Kommunizieren. Zudem eröffnen sie Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen und bieten abwechslungsreiche Übungsmöglichkeiten.

Worum es geht

Pentominos sind Figuren aus fünf Quadraten oder Würfeln gleicher Größe. Folglich decken Pentomimos mit entsprechender Rastergröße auf einer Hundertertafel fünf Zahlen ab. Diese fünf Zahlen werden in der Lernumgebung jeweils addiert.
Nachfolgend sind die Aufgaben dieser Lernumgebung in einem Überblick aufgelistet.

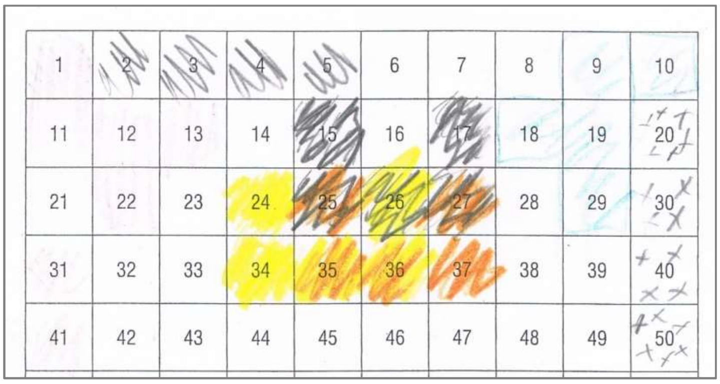
1. a) Wähle ein Pentomino und lege es auf die Hundertertafel. Berechne die Summe der fünf von ihm abgedeckten Zahlen.
   b) Verschiebe es um ein Feld nach links oder rechts, dann nach oben oder unten und berechne jeweils die Summe. Was fällt dir auf?
   c) Wiederhole die Aufgaben a) und b) mit einem anderen Pentomino.

2. a) Nimm ein Pentomino und lege es so, dass die Summe der zugedeckten Zahlen möglichst 80 (150, 222, 333) beträgt.
   b) Vergleiche deine Ergebnisse mit einer Partnerin und einem Partner.
   c) Bestimme selber eine Summe und versuche, sie mit einem Pentomino zu erreichen.

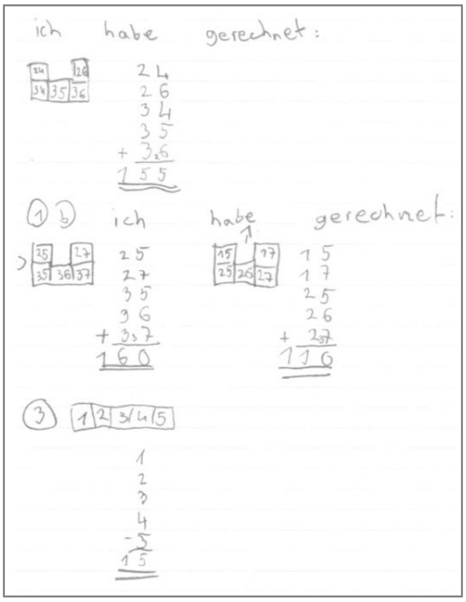
3. Welche Pentominos kann man so legen, dass die Summe der abgedeckten Zahlen durch 5 teilbar ist.

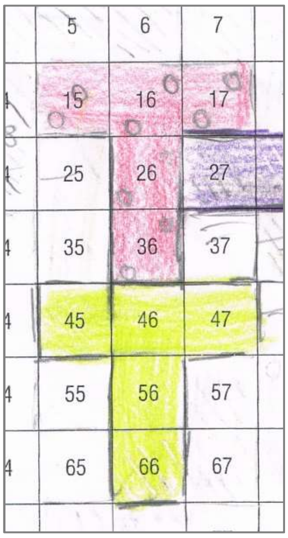
4. Lege zwei verschiedene Pentominos so auf die Hundertertafel, dass sie die gleiche Summe abdecken.

Schülerdokumente aus der Erprobung



Die Schülerin P. entscheidet sich zunächst für den „Tunnel" und berechnet die Summe (siehe 2. Abbildung) Anschließend verschiebt sie das Pentomino um ein Feld nach rechts und notiert ebenfalls wieder die Rechnung. Die fünf Zahlen werden um jeweils eins, die Summe um fünf größer.
Danach verschiebt sie das Pentomino um ein Feld nach oben. Die fünf Zahlen werden damit um jeweils zehn, die Summe um fünfzig kleiner.
Schließlich nimmt sie ein anderes Pentomino, den „Stab" und findet eine Möglichkeit ihn so zu legen, dass die Summe der Abgedeckten Zahlen durch 5 teilbar ist (Nr. 3). Sie dokumentiert ihre Überlegungen und Erkenntnisse jedoch nicht.





Die Schülerin J. hat sich die „T-Figur" ausgesucht und die Summe der Zahlen (beginnend bei der 15) berechnet. Notiert hat sie das Ergebnis 110. Anschließend verschiebt sie dasselbe Pentomino gleich um drei Felder nach unten. Die fünf Zahlen werden damit jeweils um 30, die Summe um 150 größer.

Zusammenfassung:
Alle Kinder haben verschiedene Pentominos ausprobiert, diese auf dem Hunderterfeld schrittweise verschoben und die entsprechenden Summen berechnet. Die Mehrheit der Schüler hat ebenfalls vorgegebene Summen mit entsprechenden Pentominos abgedeckt. Einzelne Schüler haben den Zusammenhang zwischen Summe und Verschieben gefunden.